

Sur les triples de Manin pour les algèbres de Lie réductives complexes

Patrick Delorme

February 1, 2008

Abstract

We study Manin triples for a reductive Lie algebra, \mathfrak{g} . First, we generalize results of E. Karolinsky, on the classification of Lagrangian subalgebras (cf. KAROLINSKY E., *A Classification of Poisson homogeneous spaces of a compact Poisson Lie group*, Dokl. Ak. Nauk, 359 (1998), 13-15). Then we show that, if \mathfrak{g} is non commutative, one can attach , to each Manin triple in \mathfrak{g} , another one for a strictly smaller reductive complex Lie subalgebra of \mathfrak{g} . We study also the inverse process.

0 Introduction

Let \mathfrak{g} be a finite dimensional, complex, reductive Lie algebra. One says that a symmetric, \mathfrak{g} -invariant, \mathbb{R} -bilinear form on \mathfrak{g} is a **Manin form** if and only if its signature is $(\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}, \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g})$. A Manin form is called special, if its restriction to any complex semisimple Lie algebra is non zero. It is easily seen that for a complex semisimple (resp. simple) Lie algebra, every non degenerate (resp. non zero) symmetric, \mathfrak{g} invariant, \mathbb{R} -bilinear form on \mathfrak{g} is a Manin form (resp. special).

Recall that a **Manin-triple** in \mathfrak{g} is a triple $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$, where B is a Manin form and where $\mathfrak{i}, \mathfrak{i}'$ are real Lie subalgebras of \mathfrak{g} , isotropic for B , and such that $\mathfrak{i} + \mathfrak{i}' = \mathfrak{g}$. Then this is a direct sum and $\mathfrak{i}, \mathfrak{i}'$ are of real dimension equal to the complex dimension of \mathfrak{g} .

Our goal is to construct all Manin-triples of \mathfrak{g} , up to conjugacy under the action on \mathfrak{g} of the connected, simply connected Lie group G with Lie algebra

\mathfrak{g} , by induction on the rank of the derived algebra of \mathfrak{g} .

One calls **af-involution** of a complex semi-simple Lie algebra \mathfrak{m} , any involutive automorphism of \mathfrak{m} , σ such that there exists :

- 1) an ideal $\tilde{\mathfrak{m}}_0$ of \mathfrak{m} , and a real form $\tilde{\mathfrak{h}}_0$ of $\tilde{\mathfrak{m}}_0$,
- 2) simple ideals of \mathfrak{m} , $\mathfrak{m}'_j, \mathfrak{m}''_j, j = 1, \dots, p$,
- 3) an isomorphism of complex Lie algebras, τ_j , between \mathfrak{m}'_j and $\mathfrak{m}''_j, j = 1, \dots, p$,

such that, denoting by $\mathfrak{h}_j := \{(X, \tau_j(X)) | X \in \mathfrak{m}'_j\}$, and by \mathfrak{h} the fixed point set of σ , one has :

$$\begin{aligned}\mathfrak{m} &= \tilde{\mathfrak{m}}_0 \oplus (\oplus_{j=1, \dots, p} (\mathfrak{m}'_j \oplus \mathfrak{m}''_j)) \\ \mathfrak{h} &= \tilde{\mathfrak{h}}_0 \oplus (\oplus_{j=1, \dots, p} \mathfrak{h}_j)\end{aligned}$$

Notice that an \mathbb{R} -linear involutive automorphism of \mathfrak{m} is determined by its fixed point set, as the set of antiinvariant points is just the orthogonal of the fixed point set, for the Killing form of \mathfrak{m} , viewed as a real Lie algebra. The following Theorem generalize previous results of E.Karolinsky (cf [K2], Theorem 1 (i) and [K1] for the proof, see also [K3] Proposition 3.1), as we do not make any restriction on the Manin form.

Theorem 1

*Let B be a Manin form and let \mathfrak{i} be a **Lagrangian subalgebra of \mathfrak{g} for B** , i.e. a real Lie subalgebra of \mathfrak{g} of dimension the complex dimension of \mathfrak{g} and isotropic for B . Then :*

- a) *If we denote by \mathfrak{p} the normalizer in \mathfrak{g} of the nilpotent radical, \mathfrak{n} , of \mathfrak{i} , then \mathfrak{p} is a parabolic subalgebra of \mathfrak{g} , with nilpotent radical equals to \mathfrak{n} .*
- b) *Let \mathfrak{l} be a Levi subalgebra of \mathfrak{p} (i.e. \mathfrak{l} is a reductive Lie subalgebra of \mathfrak{p} with $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$), and denote by \mathfrak{m} its derived ideal and \mathfrak{a} its center, then the intersection, \mathfrak{h} , of \mathfrak{i} and \mathfrak{m} is the fixed point set of an af-involution of \mathfrak{m} , which is isotropic for B . Moreover, if B is special \mathfrak{h} is a real form of \mathfrak{m}*
- c) *The intersection, $\mathfrak{i}_\mathfrak{a}$, of \mathfrak{a} and \mathfrak{i} , is isotropic for B , and its real dimension equals the complex dimension of \mathfrak{a} .*
- d) *One has $\mathfrak{i} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$.*

Reciprocally, any real Lie subalgebra, \mathfrak{i} , of \mathfrak{g} , which is of this form is Lagrangian for B .

Then, one says that \mathfrak{i} is under \mathfrak{p}

One chooses a Cartan subalgebra \mathfrak{j}_0 of \mathfrak{g} , and a Borel subalgebra of \mathfrak{g} containing $\mathfrak{j}_0, \mathfrak{b}_0$. Then, from Theorem 1 and the Bruhat decomposition, one sees (cf. Proposition 1) that every Manin triple is conjugated, under G , to a Manin triple $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ such that \mathfrak{i} is under \mathfrak{p} and \mathfrak{i}' is under \mathfrak{p}' , with \mathfrak{p} containing \mathfrak{b}_0 and \mathfrak{p}' containing the opposite Borel subalgebra to \mathfrak{b}_0 , with respect to \mathfrak{j}_0 . A Manin triple satisfying these conditions will be called **standard**, under $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$.

If \mathfrak{r} is a real subalgebra of \mathfrak{g} , we denote by R the analytic subgroup of G with Lie algebra \mathfrak{r} .

If \mathfrak{e} is an abelian real subalgebra of \mathfrak{g} , \mathfrak{r} is an \mathfrak{e} -invariant subspace of \mathfrak{g} , let

$\Delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{e})$ the set of weights of \mathfrak{e} in \mathfrak{r} , which is the subset of $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{e}, \mathbb{C})$ whose elements are joint eigenvalues of elements in \mathfrak{e} acting on \mathfrak{r} . The weight space of α in $\Delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{e})$ is denoted by \mathfrak{r}^α .

Let $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ be given as above, and let B be a Manin form on \mathfrak{g} .

Theorem 2

If there exists a standard Manin triple $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ under $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, then \mathfrak{p} or \mathfrak{p}' is different from \mathfrak{g} .

Theorem 3

Suppose that $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ is a standard Manin triple under $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$. Let $\mathfrak{p}^{\mathfrak{n}'}$ be the projection of \mathfrak{g} on the \mathfrak{j}_0 -invariant supplementary subspace of the nilpotent radical \mathfrak{n}' of \mathfrak{p}' , with kernel \mathfrak{n}' . Let $\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$ the Langlands decomposition of \mathfrak{p} , such that \mathfrak{l} contains \mathfrak{j}_0 . Set $\mathfrak{i}_1 = \mathfrak{p}^{\mathfrak{n}'}(\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}')$, where $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{l}$. One defines similarly \mathfrak{i}'_1 .

Then $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1$ are contained in $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$. Moreover, if B_1 denotes the restriction of B to $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$, $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$ is a Manin triple for $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$. We set $\mathfrak{g}_1 := \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$.

*We will use freely the notation of Theorem 1 for $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$, which is called the **predecessor of the standard Manin triple** $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$.*

Theorem 4

(i) Every Manin triple under $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ is conjugate to a standard Manin triple as above, $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$, with predecessor $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$, for which there exists a fundamental Cartan subalgebra $\tilde{\mathfrak{f}}$ (resp. $\tilde{\mathfrak{f}}'$) of \mathfrak{i} (resp. \mathfrak{i}'), included in \mathfrak{i}_1 (resp. \mathfrak{i}'_1), such that, if we denote by σ (resp. σ') the af-involution of \mathfrak{m} (resp. \mathfrak{m}'), with fixed point set \mathfrak{h} (resp. \mathfrak{h}'), then the pair $(\tilde{\mathfrak{f}}, \sigma)$ satisfies the following properties (the pair $(\tilde{\mathfrak{f}}', \sigma')$ satisfying similar properties with the obvious changes) :

1) The map σ is an af-involution of \mathfrak{m} with fixed point set \mathfrak{h} , and $\tilde{\mathfrak{f}}$ is a fundamental Cartan subalgebra of \mathfrak{i}_1 such that $\tilde{\mathfrak{f}} = \mathfrak{f} + \mathfrak{i}_a$, where $\mathfrak{f} = \tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{h}$ is a fundamental Cartan subalgebra of \mathfrak{h} and $\mathfrak{i}_a = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{a}$. Moreover \mathfrak{i}_a is Lagrangian for B restricted to \mathfrak{a} , and \mathfrak{h} is isotropic for B . Let us denote by \mathfrak{j} the centralizer of $\tilde{\mathfrak{f}}$ in \mathfrak{g} . This is a Cartan subalgebra of \mathfrak{g} , contained in $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$.

2) The intersection of \mathfrak{h} with \mathfrak{n}' is reduced to zero.

3) There exists a Borel subalgebra, \mathfrak{b} , of \mathfrak{m} , containing $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{m}$ and included in $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{p}'$, such that $\sigma(\mathfrak{b}) + \mathfrak{b} = \mathfrak{m}$.

4) There exists a unique Langlands decomposition of \mathfrak{p}_1 (where \mathfrak{i}_1 is under \mathfrak{p}_1), $\mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{n}_1$, with \mathfrak{l}_1 containing $\tilde{\mathfrak{f}}$. Then $\underline{\mathfrak{m}}_1 := [\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_1]$ is equal to the derived ideal of $(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{l}') \cap \sigma(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{l}')$.

5) If $\alpha \in \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{j})$, one can define $\underline{\alpha} \in \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{j})$ by the condition : $\sigma(\mathfrak{m}^\alpha) = \mathfrak{m}^{\underline{\alpha}}$. One has : $\mathfrak{n}_1 = \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{l}, \mathfrak{j}) \cap \Delta(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}', \mathfrak{j})} \mathfrak{m}^\alpha$.

6) The restriction of σ to $\underline{\mathfrak{m}}_1$ is equal to the af-involution of $\underline{\mathfrak{m}}_1$ having $\underline{\mathfrak{h}}_1 := \mathfrak{i}_1 \cap \underline{\mathfrak{m}}_1$ as fixed point set.

*One says that the standard Manin triple $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ is **linked**, or **linked** to its predecessor $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$, with **link** $(\tilde{\mathfrak{f}}, \tilde{\mathfrak{f}}')$.*

(ii) Reciprocally, if B is a Manin form, if $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$ is a Manin triple for

$\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$, and if $(\tilde{\mathfrak{f}}, \sigma)$ (resp. $(\tilde{\mathfrak{f}}', \sigma')$) satisfies the conditions 1) to 6) (resp. the conditions 1) to 6) with the obvious changes), then the triple $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$, where $\mathfrak{i} := \mathfrak{h} + \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{n}$, and \mathfrak{i}' is defined similarly, is a standard Manin triple, under $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, linked to $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$ with link $(\tilde{\mathfrak{f}}, \tilde{\mathfrak{f}}')$.

One shows easily that every Manin triple for \mathfrak{g} is conjugated under G to a standard linked Manin triple having a sequence of predecessors which are standard and linked (cf. Proposition 5). We say that such a Manin triple is **strongly standard**. Then the sequence is stationnary and its ending element, denoted by $(B_p, \mathfrak{i}_p, \mathfrak{i}'_p)$ (where p denotes the first index for which $\mathfrak{g}_p = \mathfrak{j}_0$) is a Manin triple in \mathfrak{j}_0 , where B_p is the restriction of B to \mathfrak{j}_0 . It depends only on the conjugacy class under G of the original Manin triple and it is called the **bottom of this conjugacy class**. Then, if $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$ is as in Theorem 3 (ii), and moreover strongly standard, the existence of a fundamental Cartan subalgebra $\tilde{\mathfrak{f}}$ of \mathfrak{i}_1 with $\tilde{\mathfrak{f}}$ is equal to the sum of its intersections with \mathfrak{m} and \mathfrak{a} (as in condition 1) of the Theorem 4) is equivalent to the fact that \mathfrak{i}_p satisfies the same property. Moreover, in this case $\tilde{\mathfrak{f}}$ and \mathfrak{i}_p are conjugate by an element x_1 of $I_1 I_2 \dots I_p$. More precisely $x_1 = y_1 \dots y_p$, where the y_j are elements of I_j such that for all $j = 2, \dots, p$, one has $Ad(y_j y_{j+1} \dots y_p)(\mathfrak{i}_p) \subset \mathfrak{i}_j \cap \mathfrak{i}_{j-1}$. This allows us to partly reduce the construction of an af-involution, for which the fixed point set has $\mathfrak{f} = \tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{m}$ as fundamental Cartan subalgebra, and satisfying the properties 1) to 5), to a similar problem with \mathfrak{f} replaced by $\mathfrak{i}_p \cap \mathfrak{m}$, \mathfrak{l}_1 , by \mathfrak{l}_1 , where \mathfrak{l}_1 contains \mathfrak{j}_0 , and $\mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{n}_1$ is a Langlands decomposition of \mathfrak{p} (cf. Lemme 13). The correspondance between the solutions of the two problems is given by conjugacy under x_1 . In principle, this problem can be solved explicetely, the possibilities for $\mathfrak{i}_p \cap \mathfrak{m}$ being finite. Up to conjugacy by J_0 , there are only finetely many solutions (Propositions 6, 7). The condition 6) adds an extra restriction.

One wants also to decide when the Manin triples that are built with the help of Theorem 4 (ii) are conjugate under G .

This question reduces, by induction, to determining when strongly standard Manin triples, with a given predecessor $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$, and which are under $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ are conjugate.

Let \bar{I} be the normalizer of \mathfrak{i} in G . It is equal to $\overline{H}AN$, where $\overline{H} = \{m \in M \mid Ad m|_{\mathfrak{m}} \text{ commutes with } \sigma\}$. Then, the problem of conjugacy ultimately reduces to deciding whether the intersection of $x\bar{I}$ with $x'\bar{I}'$ is non empty. Here, the elements x, x' of G can be determined from the data, in particular from the x_1 above, corresponding to each of the triples.

Comment on proofs:

The proof of Theorem 1 rests on the properties of the radical and of the nilpotent radical of a Lie algebra (cf. [Bou], Groupes et algèbres de Lie, Chapitre I), and the decomposition of elements in a semisimple Lie algebra as a sum of commuting nilpotent and semisimple elements. As we said already, our method of proof is probably a mixing of the Karolinsky's method for proving his results quoted above.

In the proof of Theorem 2, we use a result of Gantmacher [G] which ensures that every automorphism of a real semisimple Lie algebra has non zero fixed points.

The proof of Theorem 3 is elementary.

In the proof of Theorem 4, we use the characterization, by T. Matsuki ([M1], [M2]) of open orbits in generalized flag manifolds of a complex semisimple Lie group, under the action of the fixed point set of an involutive automorphism.

Acknowledgment : I thank very much C. Klimcik for suggesting me this work, and for many interesting discussions. I thank also J.L. Brylinski for pointing out to me the work of E. Karolinsky.

1 Sous-algèbres de Lie Lagrangiennes

Dans tout l'article, algèbre de Lie voudra dire algèbre de Lie de dimension finie.

Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie on notera souvent \mathfrak{g}^{der} son idéal dérivé.

Soit \mathfrak{a} est une algèbre de Lie abélienne sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , V un \mathfrak{a} -module complexe. Pour $\lambda \in Hom_{\mathbb{K}}(\mathfrak{a}, \mathbb{C})$, on note $V^\lambda := \{v \in V | Xv = \lambda(X)v, X \in \mathfrak{a}\}$, qui est appelé le sous-espace de poids λ de V . On dit que λ est un poids de \mathfrak{a} dans V si V^λ est non nul et on note $\Delta(V, \mathfrak{a})$ l'ensemble des poids non nuls de \mathfrak{a} dans V .

Si G est un groupe de Lie, on notera G^0 sa composante neutre.

Lemme 1

(i) Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple complexe, $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_n$ ses idéaux simples. Toute forme \mathbb{R} -bilinéaire \mathfrak{g} -invariante sur \mathfrak{g} est du type B_λ (ou $B_\lambda^{\mathfrak{g}}$), où $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ et :

$$B_\lambda(X_1 + \dots + X_n, Y_1 + \dots + Y_n) = \sum_{i=1, \dots, n} Im(\lambda_i K_{\mathfrak{g}_i}(X_i, Y_i)),$$

si les X_i, Y_i sont des éléments de \mathfrak{g}_i . Ici $K_{\mathfrak{g}_i}$ désigne la forme de Killing de \mathfrak{g}_i .

En particulier, une telle forme est symétrique et les idéaux simples sont deux à deux orthogonaux pour une telle forme.

(ii) La forme B_λ est non dégénérée si et seulement si chacun des λ_i est non nul. Elle est alors de signature $(\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}, \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g})$.

(iii) La restriction de $B_\lambda^{\mathfrak{g}}$ à une sous-algèbre complexe et simple, \mathfrak{s} , de \mathfrak{g} , est de la forme $B_\mu^{\mathfrak{s}}$, où $\mu = \sum_{i=1, \dots, n} q_i \lambda_i$ et pour chaque i , q_i est un nombre rationnel positif. De plus q_i est non nul si et seulement si \mathfrak{s} a un crochet non nul avec \mathfrak{g}_i .

Démonstration : Traitons d'abord le cas où \mathfrak{g} est simple, auquel cas $n = 1$. La donnée d'une forme \mathbb{R} -bilinéaire \mathfrak{g} -invariante sur \mathfrak{g} , équivaut à celle d'une application \mathbb{R} -linéaire entre \mathfrak{g} et $Hom_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$, qui commute à l'action de \mathfrak{g} ,

regardée comme algèbre de Lie réelle. Mais la partie imaginaire de la forme de Killing de \mathfrak{g} (regardée comme complexe) détermine un isomorphisme de \mathfrak{g} -modules entre \mathfrak{g} et $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$. Finalement, la donnée de notre forme équivaut à la donnée d'un endomorphisme, T , \mathbb{R} -linéaire de \mathfrak{g} , commutant à l'action de \mathfrak{g} .

Soit \mathfrak{k} une forme réelle compacte de \mathfrak{g} . On écrit :

$$T(X) = \text{Re } T(X) + i \text{Im } T(X), \quad X \in \mathfrak{k},$$

où $\text{Re } T(X), \text{Im } T(X) \in \mathfrak{k}$. Alors $\text{Re } T, \text{Im } T$ sont des éléments de $\text{Hom}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{k}, \mathfrak{k})$. Comme \mathfrak{k} est simple, il résulte du lemme de Schur que cet espace est égal à $\mathbb{R} \text{Id}_{\mathfrak{k}}$. Donc, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$T(X) = \lambda X, \quad X \in \mathfrak{k}$$

Maintenant, si $X, Y \in \mathfrak{k}$, on a :

$$T(i[X, Y]) = T([iX, Y]) = [iX, TY]$$

la dernière égalité résultant du fait que T commute à l'action de \mathfrak{g} . Joint à ce qui précède, cela donne :

$$T(i[X, Y]) = \lambda i[X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{k}$$

Comme $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] = \mathfrak{k}$, on conclut que T est la multiplication par λ . D'où (i) dans le cas où \mathfrak{g} est simple.

Supposons maintenant que \mathfrak{g} soit la somme directe de deux idéaux \mathfrak{g}' , \mathfrak{g}'' . Soit B une forme \mathbb{R} -bilinéaire \mathfrak{g} -invariante sur \mathfrak{g} . On a :

$$B([X', Y'], X'') = -B(Y', [X', X'']) = 0, \quad X', Y' \in \mathfrak{g}', \quad X'' \in \mathfrak{g}'',$$

la dernière égalité résultant du fait que \mathfrak{g}' , \mathfrak{g}'' commutent entre eux. Comme $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, on a aussi $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] = \mathfrak{g}'$. Finalement \mathfrak{g}' et \mathfrak{g}'' sont orthogonaux. Alors, on déduit (i) pour \mathfrak{g} semi-simple du cas où \mathfrak{g} est simple.

(ii) L'assertion sur la non nullité des λ_i est claire. Pour l'étude de la signature, on se ramène au cas où \mathfrak{g} est simple. Supposons $\lambda \in \mathbb{C}$, non nul. Soit \mathfrak{k} une forme réelle compacte de \mathfrak{g} . On fixe une base X_1, \dots, X_l de \mathfrak{k} . On choisit une racine carrée μ de $i\lambda^{-1}$. On pose $Y_i = \mu X_i$, $Z_i = i\mu X_i$. Alors $B_\lambda(Y_i, Z_j) = 0$, $B_\lambda(Y_i, Y_j) = \delta_{i,j}$, $B_\lambda(Z_i, Z_j) = -\delta_{i,j}$. D'où l'on déduit l'assertion voulue sur la signature.

(iii) On utilisera le fait suivant :

Si ρ est une représentation complexe d'une algèbre de Lie simple complexe \mathfrak{s} dans un espace de dimension finie V , on a :

$$\text{tr}(\rho(X)\rho(Y)) = qK_{\mathfrak{s}}(X, Y)$$

où q est un nombre rationnel positif. De plus q est nul si et seulement si ρ est triviale.

L'existence d'un coefficient de proportionnalité q est claire , car la forme de Killing est la seule forme \mathbb{C} -bilinéaire sur \mathfrak{s} , à un scalaire multiplicatif près. On se ramène, pour l'étude de q , au cas où ρ est simple. On considère, sur V , un produit scalaire invariant par une forme réelle compacte, \mathfrak{k} , de \mathfrak{s} . Si $X \in \mathfrak{k}$, $\rho(X)$ est antihermitien et :

$$\mathrm{tr}(\rho(X)\rho(X)) = -\mathrm{tr}(\rho(X)\rho(X)^*) \leq 0$$

cette trace étant nulle seulement si $\rho(X)$ est nul. On en déduit que $q > 0$ si ρ est non triviale. Puis on prend un élément non nul d'une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{j} de \mathfrak{s} , sur lequel tous les poids entiers de \mathfrak{j} sont entiers. On en déduit que $K_{\mathfrak{g}}(X, X)$ et $\mathrm{tr}(\rho(X)\rho(X))$ sont des entiers, le premier nombre étant non nul car égal à la somme sur toutes les racines, α , de $(\alpha(X))^2$. La rationalité de q en résulte. \square

Définition 1

Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie réductive complexe, une forme \mathbb{R} -bilinéaire symétrique sur \mathfrak{g} et invariante par \mathfrak{g} est dite forme de Manin si et seulement si elle est de signature $(\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}, \dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g})$. Une forme de Manin est dite forme spéciale si sa restriction à toute sous-algèbre de Lie complexe semi-simple est non dégénérée.

Lemme 2

- (i) *Une forme \mathbb{R} -bilinéaire symétrique \mathfrak{g} -invariante sur \mathfrak{g} est spéciale si et seulement si sa restriction à \mathfrak{g}^{der} est spéciale et si sa restriction au centre, \mathfrak{z} , de \mathfrak{g} est de signature $(\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{z}, \dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{z})$.*
- (ii) *La restriction d'une forme spéciale à une sous-algèbre de Lie semisimple complexe de \mathfrak{g} est spéciale.*
- (iii) *La restriction d'une forme spéciale au centralisateur d'un élément semi-simple de \mathfrak{g} , dont l'image par la représentation adjointe de \mathfrak{g} n'a que des valeurs propres réelles, est spéciale.*
- (iv) *Si \mathfrak{g} est semi-simple, et $B = B_{\lambda}^{\mathfrak{g}}$, où $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ vérifie :*

$$\text{Si } \sum_{i=1, \dots, n} q_i \lambda_i = 0 \text{ avec } q_i \in \mathbb{Q}^+, \text{ alors les } q_i \text{ sont tous nuls} \quad (1.1)$$

alors B est spéciale. On note que (1.1) est satisfait dès que les λ_i sont indépendants sur \mathbb{Q} , ou bien tous strictement positifs.

- (v) *Si \mathfrak{g} est simple, toute forme \mathbb{R} -bilinéaire symétrique \mathfrak{g} -invariante sur \mathfrak{g} est spéciale.*

Démonstration : (i) résulte du fait que toute sous-algèbre semi-simple de \mathfrak{g} est contenue dans \mathfrak{g}^{der} et que, pour toute forme \mathbb{R} -bilinéaire symétrique \mathfrak{g} -invariante sur \mathfrak{g} , le centre de \mathfrak{g} et \mathfrak{g}^{der} sont orthogonaux.

(ii) est clair.

Montrons (iii). Comme le centralisateur d'un élément de \mathfrak{g} est la somme de

son intersection avec \mathfrak{g}^{der} et de celle avec le centre, on se réduit aisément, grâce à (i) au cas où \mathfrak{g} est semi-simple, ce que l'on suppose dans la suite. Soit X un élément semi-simple de \mathfrak{g} tel que $ad X$ n'a que des valeurs propres réelles, soit \mathfrak{l} son centralisateur et \mathfrak{c} le centre de \mathfrak{l} . D'après (i) et (ii), il suffit de voir que la restriction d'une forme spéciale à \mathfrak{c} est de signature $(\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{c}, \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{c})$. Soit \mathfrak{j} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} contenant X . Alors \mathfrak{c} est égal à l'intersection des noyaux des racines de \mathfrak{j} dans \mathfrak{g} s'annulant sur X . Cela montre que \mathfrak{c} est la somme de ses intersections avec les idéaux simples de \mathfrak{g} . Il suffit alors de prouver notre assertion sur la signature dans le cas où \mathfrak{g} est simple. Alors $B = B_{\lambda}$, avec λ non nul. Soit $\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}$ l'espace formé des éléments de \mathfrak{j} sur lesquels toutes les racines de \mathfrak{j} dans \mathfrak{g} sont réelles, qui est une forme réelle de \mathfrak{j} . Il est clair que \mathfrak{c} est la somme directe de $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}} := \mathfrak{c} \cap \mathfrak{j}_{\mathbb{R}}$ avec $i\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$. On fixe une base orthonormée, X_1, \dots, X_l , de $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$, pour la forme de Killing de \mathfrak{g} . Celle-ci existe car la forme de Killing est définie positive sur $\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}$. On choisit une racine carrée μ de $i\lambda^{-1}$. On pose $Y_i = \mu X_i$, $Z_i = i\mu X_i$. Alors $B_{\lambda}(Y_i, Z_j) = 0$, $B_{\lambda}(Y_i, Y_j) = \delta_{i,j}$, $B_{\lambda}(Z_i, Z_j) = -\delta_{i,j}$. D'où l'on déduit l'assertion voulue sur la signature, ce qui prouve (iii). (iv) est une conséquence immédiate du Lemme 1 et (v) est un cas particulier de (iv) \square

Corollaire 1 (i) La restriction, d'une forme \mathbb{R} -bilinéaire, symétrique, \mathfrak{g} -invariante sur \mathfrak{g} , et non dégénérée, B , au centralisateur, \mathfrak{l} d'un élément semi-simple de \mathfrak{g} , dont l'image par la représentation adjointe de \mathfrak{g} n'a que des valeurs propres réelles, est non dégénérée. Il en va de même de sa restriction à \mathfrak{l}^{der} et au centre \mathfrak{a} de \mathfrak{l} .

(ii) Si B est une forme de Manin sur \mathfrak{g} , sa restriction à \mathfrak{l} (resp. \mathfrak{l}^{der} , \mathfrak{a}) est une forme de Manin sur \mathfrak{l} (resp. \mathfrak{l}^{der} , \mathfrak{a}).

(iii) Une forme bilinéaire symétrique, \mathfrak{g} -invariante est une forme de Manin si et seulement si sa restriction à \mathfrak{g}^{der} et sa restriction au centre de \mathfrak{g} sont des formes de Manin.

Démonstration :

L'algèbre de Lie \mathfrak{l} est la somme du centre \mathfrak{z} de \mathfrak{g} avec la somme de ses intersections avec les idéaux simples de \mathfrak{g} . Ces sous-algèbres sont deux à deux orthogonales pour B , d'après le Lemme 1. La restriction de B à \mathfrak{z} est non dégénérée, car \mathfrak{g}^{der} et \mathfrak{z} sont orthogonaux. De plus la restriction de B à l'intersection de \mathfrak{l} avec un idéal simple de \mathfrak{g} est non dégénérée, d'après le Lemme 2 (iii), appliqué à cet idéal simple. D'où l'on déduit que la restriction de B à \mathfrak{l} est non dégénérée, ce qui implique le même fait pour sa restriction à \mathfrak{l}^{der} et \mathfrak{a} .

Si B est de signature $(\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}, \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g})$, sa restriction à \mathfrak{z} est de signature $(\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{z}, \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{z})$. Alors, les assertions sur la signature se démontrent comme ci-dessus, grâce au Lemme 2 (ii), (v), appliqué aux idéaux simples de \mathfrak{g} . D'où (ii).

La partie si de (iii) est claire. La partie seulement si résulte de (ii) \square

On rappelle que le radical d'une algèbre de Lie, \mathfrak{g} est son plus grand idéal résoluble, et que son radical nilpotent, est le plus grand idéal, dont les éléments sont représentés par des endomorphismes nilpotents dans chaque représentation de dimension finie de \mathfrak{g} . Suivant Bourbaki, on appelle sous-algèbre de Levi d'une algèbre de Lie, toute sous-algèbre semi-simple supplémentaire du radical. Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie semi-simple complexe on appelle décomposition de Langlands d'une sous-algèbre parabolique \mathfrak{p} de \mathfrak{g} une décomposition de la forme $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$, où \mathfrak{n} est le radical nilpotent et \mathfrak{l} est une sous-algèbre de Lie complexe de \mathfrak{g} , réductive dans \mathfrak{g} .

Rassemblons dans un Lemme quelques propriétés des décompositions de Langlands d'une sous-algèbre parabolique.

Lemme 3 *Soit une \mathfrak{p} sous-algèbre parabolique de \mathfrak{g} , \mathfrak{n} son radical nilpotent.*

(i) *Si \mathfrak{j} est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{p} , c'est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , et il existe une seule décomposition de Langlands de \mathfrak{p} , $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$, telle que \mathfrak{j} soit contenue dans \mathfrak{l} .*

(ii) *Si \mathfrak{j} , \mathfrak{j}' sont deux sous-algèbres de Cartan de \mathfrak{g} , contenues dans \mathfrak{p} , elles sont conjuguées par un élément de P , qui conjugue les algèbres \mathfrak{l} et \mathfrak{l}' correspondantes.*

(iii) *Si $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$ est une décomposition de Langlands de \mathfrak{p} , toute sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{p} est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} .*

Démonstration :

Revenant à la définition des sous-algèbres paraboliques (cf [Bou], Ch. VIII, Paragraphe 3.4, Définition 2, par exemple), on voit qu'il existe une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , \mathfrak{j}_1 , et une décomposition de Langlands de \mathfrak{p} , $\mathfrak{p} = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{n}$, avec \mathfrak{j}_1 contenue dans \mathfrak{l}_1 , telle que \mathfrak{l}_1 soit la somme des sous-espaces poids de \mathfrak{j}_1 dans \mathfrak{p} , qui ne rencontre pas \mathfrak{n} . En particulier les poids de \mathfrak{j}_1 dans $\mathfrak{l}_1 \approx \mathfrak{p}/\mathfrak{n}$ sont distincts de ceux dans \mathfrak{n} . Si $\mathfrak{p} = \mathfrak{l}'_1 \oplus \mathfrak{n}$ est une décomposition de Langlands de \mathfrak{p} , avec \mathfrak{j}_1 contenue dans \mathfrak{l}'_1 , \mathfrak{l}'_1 est somme des sous-espaces poids de \mathfrak{j}_1 dans $\mathfrak{l}'_1 \approx \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$. D'où l'égalité de \mathfrak{l}_1 et \mathfrak{l}'_1 . Ceci assure l'unicité de \mathfrak{l} pour $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_1$. Maintenant toutes les sous-algèbres de Cartan de \mathfrak{p} sont conjuguées à \mathfrak{j}_1 , par un élément de P (cf. [Bour], Paragraphe 3.3, Théorème 1). On en déduit (i) par transport de structure, et (ii) résulte de la preuve de (i).

Montrons (iii). Si $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$ est une décomposition de Langlands de \mathfrak{p} , l'action du centre de \mathfrak{l} sur \mathfrak{g} est semi-simple, puisque \mathfrak{l} est réductive dans \mathfrak{g} . Cela implique que, si \mathfrak{j} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{l} , \mathfrak{j} est abélienne et formée d'éléments semi-simples de \mathfrak{g} . Mais \mathfrak{l} est isomorphe à $\mathfrak{p}/\mathfrak{n}$, qui est une algèbre réductive de même rang que \mathfrak{g} . Pour des raisons de dimension, on voit que \mathfrak{j} est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} . \square

Définition 2 *On appelle af -involution (a pour antilinéaire, f pour flip) d'une algèbre de Lie semi-simple complexe \mathfrak{m} , tout automorphisme involutif, \mathbb{R} -*

linéaire, σ , de \mathfrak{m} , pour lequel il existe :

- 1) un idéal $\tilde{\mathfrak{m}}_0$ de \mathfrak{m} , et une forme réelle, $\tilde{\mathfrak{h}}_0$ of \mathfrak{m}_0 .
- 2) des idéaux simples de \mathfrak{m} , \mathfrak{m}'_j , \mathfrak{m}''_j , $j = 1, \dots, p$.
- 3) un isomorphisme d'algèbres de Lie complexes, τ_j , entre \mathfrak{m}'_j et \mathfrak{m}''_j , $j = 1, \dots, p$,
tel que, notant $\mathfrak{h}_j := \{(X, \tau_j(X)) | X \in \mathfrak{m}'_j\}$, et notant \mathfrak{h} , l'ensemble des points fixes de σ , on ait :

$$\mathfrak{m} = \tilde{\mathfrak{m}}_0 \oplus (\oplus_{j=1, \dots, p} (\mathfrak{m}'_j \oplus \mathfrak{m}''_j))$$

$$\mathfrak{h} = \tilde{\mathfrak{h}}_0 \oplus (\oplus_{j=1, \dots, p} \mathfrak{h}_j)$$

Il est bon de remarquer qu'un automorphisme involutif de \mathfrak{m} est caractérisé par son espace de points fixes, car l'espace des éléments anti-invariants est juste l'orthogonal de celui-ci, pour la forme de Killing de \mathfrak{m} regardée comme réelle.

Débutons par quelques propriétés élémentaires.

Lemme 4 *Soit \mathfrak{h} une forme réelle simple d'une algèbre de Lie semi-simple complexe \mathfrak{s} .*

- (i) *L'algèbre \mathfrak{s} n'est pas simple, si et seulement si \mathfrak{h} admet une structure complexe*
- (ii) *Dans ce cas, \mathfrak{s} est le produit de deux idéaux simples, \mathfrak{s}_1 , \mathfrak{s}_2 , isomorphes à \mathfrak{h} .*
- (iii) *Toujours dans ce cas, il existe un isomorphisme antilinéaire, τ , entre les algèbres de Lie \mathfrak{s}_1 , \mathfrak{s}_2 , regardées comme réelles, tel que :*

$$\mathfrak{h} = \{(X, \tau(X)) | X \in \mathfrak{s}_1\}$$

Démonstration :

Les points (i) et (ii) sont bien connus. Montons (iii). Comme \mathfrak{h} est une forme réelle de $\mathfrak{s}_1 \oplus \mathfrak{s}_2$, la projection de \mathfrak{h} sur chacun des deux facteurs est non nulle, donc induit un isomorphisme \mathbb{R} -linéaire de \mathfrak{h} avec chacun de ces facteurs. Il en résulte que \mathfrak{h} a la forme indiquée, mais on sait seulement que τ est \mathbb{R} -linéaire. Mais alors \mathfrak{h} apparaît comme l'ensemble des points fixes de l'automorphisme involutif \mathbb{R} -linéaire de \mathfrak{s} défini par :

$$(X, Y) \mapsto (\tau^{-1}(Y), \tau(X)), X \in \mathfrak{s}_1, Y \in \mathfrak{s}_2$$

D'après la remarque qui précède le Lemme, cette involution doit être égale à la conjugaison par rapport à \mathfrak{h} , donc elle est antilinéaire. Ceci implique l'antilinéarité de τ . \square

Lemme 5 *On se donne une af-involution, σ , d'une algèbre de Lie semi-simple de \mathfrak{m} . Les idéaux simples de \mathfrak{m} sont permutés par σ . On note \mathfrak{m}_j , $j = 1, \dots, r$, les idéaux simples de \mathfrak{m} . On définit une involution θ de $\{1, \dots, r\}$ caractérisée par : $\sigma(\mathfrak{m}_j) = \mathfrak{m}_{\theta(j)}$, $j = 1, \dots, r$. Pour $j = 1, \dots, r$, l'une des*

propriétés suivantes est vérifiée :

1) $\theta(j) = j$ et la restriction de σ à \mathfrak{m}_j est un automorphisme antilinéaire de \mathfrak{m}_j .

2) $\theta(j) \neq j$ et la restriction de σ à \mathfrak{m}_j est un isomorphisme antilinéaire de \mathfrak{m}_j sur $\mathfrak{m}_{\theta(j)}$.

3) $\theta(j) \neq j$ et la restriction de σ à \mathfrak{m}_j est un isomorphisme \mathbb{C} -linéaire de \mathfrak{m}_j sur $\mathfrak{m}_{\theta(j)}$.

On est dans le cas 1) ou 2) si et seulement si \mathfrak{m}_j est contenu dans l'idéal $\tilde{\mathfrak{m}}_0$ de la définition des af-involutions.

Démonstration :

En effet, soit \mathfrak{h}_{p+l} , $l = 1, \dots, q$, les idéaux simples de $\tilde{\mathfrak{h}}_0$. Comme $\tilde{\mathfrak{h}}_0$ est une forme réelle de $\tilde{\mathfrak{m}}_0$, $\tilde{\mathfrak{m}}_0$ est la somme directe des $\mathfrak{h}_l + i\mathfrak{h}_l$, qui sont en outre des idéaux. Si $\mathfrak{h}_l + i\mathfrak{h}_l$ est simple, c'est un idéal simple de \mathfrak{m} et on est dans le cas 1). Sinon $\mathfrak{h}_l + i\mathfrak{h}_l$ est le produit de deux idéaux simples $\mathfrak{m}_j \times \mathfrak{m}'_j$ et l'on est dans le cas 2).

On traite de même le cas où \mathfrak{m}_l est égal à l'un des \mathfrak{m}'_j , \mathfrak{m}''_j , $j = 1, \dots, p$, en remarquant que \mathfrak{h}_j

est l'ensemble des points fixes de l'involution \mathbb{C} -linéaire de $(\mathfrak{m}'_j, \mathfrak{m}''_j)$ donnée par :

$$(X, Y) \mapsto (\tau^{-1}(Y), \tau(X)), X \in \mathfrak{m}'_j, Y \in \mathfrak{m}''_j \quad (1.2)$$

□

Lemme 6 *Tout isomorphisme \mathbb{R} -linéaire entre deux algèbres de Lie simples complexes est soit \mathbb{C} -linéaire, soit antilinéaire.*

Démonstration :

Deux algèbres de Lie semi-simples complexes qui sont isomorphes comme algèbres réelles, sont isomorphes comme algèbre de Lie complexes. En effet, leurs systèmes de racines restreintes sont alors isomorphes. Mais chacun de ceux-ci est isomorphe au système de racine associé à une sous-algèbre de Cartan. D'où l'assertion. Ceci implique que l'on peut se limiter, pour prouver le Lemme, aux automorphismes \mathbb{R} -linéaire d'une algèbre de Lie simple complexe, \mathfrak{g} . Considérant la conjugaison par rapport à une forme réelle de \mathfrak{g} , $X \mapsto \overline{X}$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}' := \{(X, \overline{X}) | X \in \mathfrak{g}\}$ est une forme réelle de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ isomorphe à \mathfrak{g} . Alors tout automorphisme, σ , \mathbb{R} -linéaire de \mathfrak{g} , définit, par transport de structure, un automorphisme de \mathfrak{g}' , σ' , qui possède un unique prolongement \mathbb{C} -linéaire à $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, σ'' . Il existe deux automorphismes \mathbb{C} -linéaires de \mathfrak{g} , τ et σ , tels que σ'' vérifie :

$$\sigma''(X, Y) = (\tau(X), \theta(Y)) \text{ ou bien } (\tau(Y), \theta(X)), (X, Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$$

Ecrivant la définition de σ' , la stabilité de \mathfrak{g}' , par σ'' implique que σ est \mathbb{C} -linéaire dans le premier cas et antilinéaire dans le second. □

Corollaire *Une involution d'une algèbre de Lie semi-simple complexe est une af-involution si et seulement si sa restriction à tout idéal simple qu'elle laisse invariant est antilinéaire.*

Démonstration :

En effet, d'après le Lemme 5, il suffit de voir que tout automorphisme du produit de deux algèbres de Lie simples complexes $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2$, permutant les facteurs, est soit \mathbb{C} -linéaire, soit antilinéaire. Mais un tel automorphisme est de la forme :

$$(X, Y) \mapsto (\tau^{-1}(Y), \tau(X)), X \in \mathfrak{s}_1, Y \in \mathfrak{s}_2,$$

où τ est un isomorphisme \mathbb{R} -linéaire entre $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2$. On conclut grâce au Lemme précédent. \square

Comme on l'a indiqué dans l'introduction, le Théorème suivant généralise des résultats d'E. Karolinsky (cf. [K1], Théorème 3 (i) et [K3] Proposition 3.1)

Théorème 1 *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réductive complexe et B une forme de Manin. Soit \mathfrak{i} une sous-algèbre de Lie réelle de \mathfrak{g} , Lagrangienne pour B . On a les propriétés suivantes :*

(i) *Si l'on note \mathfrak{p} le normalisateur dans \mathfrak{g} du radical nilpotent, \mathfrak{n} , de \mathfrak{i} , \mathfrak{p} est une sous-algèbre parabolique de \mathfrak{g} , contenant \mathfrak{i} , de radical nilpotent \mathfrak{n} .*

(ii) *Soit $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$ une décomposition de Langlands de \mathfrak{p} , \mathfrak{a} le centre de \mathfrak{l} et \mathfrak{m} son idéal dérivé. On note \mathfrak{h} l'intersection de \mathfrak{i} et \mathfrak{m} . Elle est isotrope pour B . De plus \mathfrak{h} est l'espace des points fixes d'une af-involution de \mathfrak{m} .*

Si B est spéciale, celle-ci est antilinéaire et \mathfrak{h} est une forme réelle de \mathfrak{m} .

(iii) *L'intersection $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ de \mathfrak{a} et \mathfrak{i} est Lagrangienne pour la restriction de B à \mathfrak{a} .*

(iv) *On a $\mathfrak{i} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}$.*

Réciproquement si une sous-algèbre de Lie réelle, \mathfrak{i} , de \mathfrak{g} est de la forme ci-dessus, elle est Lagrangienne pour B . On dit alors que \mathfrak{i} est sous \mathfrak{p} .

Début de la démonstration du Théorème 1 : Soit \mathfrak{i} une sous-algèbre de Lie réelle de \mathfrak{g} , isotrope pour B , dont la dimension est égale à la dimension complexe de \mathfrak{g} . On note \mathfrak{r} son radical et on pose :

$$\mathfrak{n} := \{X \in \mathfrak{r} \cap \mathfrak{g}^{der} | ad_{\mathfrak{g}}(X) \text{ est nilpotent}\} \quad (1.3)$$

Soit \mathfrak{h} une sous-algèbre de Levi de \mathfrak{i} .

Lemme 7 *L'ensemble \mathfrak{n} est un idéal de \mathfrak{i} et $[\mathfrak{i}, \mathfrak{r}]$ est contenu dans \mathfrak{n} .*

Démonstration : Montrons que \mathfrak{n} est un idéal de \mathfrak{r} contenant $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$. En effet, comme \mathfrak{r} est résoluble, dans une base, sur \mathbb{C} , bien choisie de \mathfrak{g} , les $ad_{\mathfrak{g}}(X)$, $X \in \mathfrak{r}$ s'écrivent sous forme de matrices triangulaires supérieures. Pour $X \in \mathfrak{r}$, les entrées de la diagonale de cette matrice sont notées $\lambda_1(X), \dots, \lambda_p(X)$, où les λ_i sont des caractères de \mathfrak{r} . Alors \mathfrak{n} est l'intersection des noyaux de ces caractères avec \mathfrak{g}^{der} . Donc \mathfrak{n} est un idéal de \mathfrak{r} contenant $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$.

Si \mathfrak{f} est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{h} , $\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{r}$ est encore une algèbre de Lie résoluble car $[\mathfrak{f}, \mathfrak{f}] = \{0\}$ et $[\mathfrak{f}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r}$. Un argument similaire à celui ci-dessus montre que $[\mathfrak{f}, \mathfrak{r}]$ est contenu dans \mathfrak{n} . La réunion de toutes les sous-algèbres de Cartan de \mathfrak{h} est dense dans \mathfrak{h} , d'après la densité des éléments réguliers (cf.[Bou], Ch. VII, Paragraphe 2.2 et Paragraphe 2.3, Théorème 1). Par continuité et densité, on en déduit que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{n}$. \square

Lemme 8 *Soit k un entier compris entre 0 et la dimension réelle de $\mathfrak{r}/\mathfrak{n}$. Il existe un sous-espace réel, abélien, \mathfrak{a}_k , de \mathfrak{r} , de dimension k , tel que :*

- (i) $\mathfrak{a}_k \cap \mathfrak{n} = \{0\}$.
- (ii) \mathfrak{a}_k est formé d'éléments semi-simples de \mathfrak{g} .
- (iii) \mathfrak{a}_k et \mathfrak{h} commutent.

Démonstration : On procède par récurrence sur k . Si $k = 0$, le Lemme est clair. Supposons le démontré pour $k < \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{r}/\mathfrak{n})$ et montrons le au rang $k + 1$. Alors $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k$ est une algèbre de Lie réductive dans \mathfrak{g} , regardée comme réelle. D'autre part, comme \mathfrak{n} contient $[\mathfrak{i}, \mathfrak{r}]$ d'après le Lemme précédent, on voit que \mathfrak{i} et donc $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k$ agit trivialement sur $\mathfrak{r}/\mathfrak{n}$. Ceci implique que :

$$[\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_k \oplus \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$$

Donc, $\mathfrak{a}_k \oplus \mathfrak{n}$ est un $(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k)$ -sous-module de \mathfrak{r} , qui admet un supplémentaire dans \mathfrak{r} commutant à $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k$, puisque $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k$ est réductive dans \mathfrak{g} et que le quotient $\mathfrak{r}/\mathfrak{a}_k \oplus \mathfrak{n}$ est un $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k$ -module trivial.

On choisit un élément non nul de ce supplémentaire, X . Alors :

$$X \in \mathfrak{r}, \quad X \notin \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k, \quad \text{et} \quad [X, \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k] = \{0\} \quad (1.4)$$

On écrit $X = X_s + X_n$, où X_n est un élément de \mathfrak{g}^{der} , X_s est un élément de \mathfrak{g} commutant à X_n tels que $ad_{\mathfrak{g}}X_s$ est semi-simple et $ad_{\mathfrak{g}}X_n$ est nilpotent. On sait qu'alors $ad_{\mathfrak{g}}X_s$, $ad_{\mathfrak{g}}X_n$ sont des polynômes en $ad_{\mathfrak{g}}X$. Joint à (1.2), cela implique :

$$[X_s, \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k] = \{0\}, \quad [X_n, \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k] = \{0\} \quad (1.5)$$

Montrons que X_n appartient à \mathfrak{i} . Soit \mathfrak{j} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{h} . Alors $\mathfrak{j} \oplus \mathfrak{r}$ est résoluble. On peut donc choisir une base de \mathfrak{g} dans laquelle les $ad_{\mathfrak{g}}Y$, $Y \in \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{r}$, sont représentés par des matrices triangulaires supérieures. On peut choisir cette base de sorte qu'elle soit la réunion de bases des idéaux simples de \mathfrak{g} avec une base du centre de \mathfrak{g} , ce que l'on fait dans la suite. Comme $ad_{\mathfrak{g}}X_n$ est un polynôme en $ad_{\mathfrak{g}}X$, et que $X \in \mathfrak{r}$, il est représenté dans cette base par une matrice triangulaire supérieure. Comme cet endomorphisme est nilpotent, sa diagonale est nulle. On en déduit que, pour tout $Y \in \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{r}$, les composantes de X_n et Y dans les idéaux simples de \mathfrak{g} sont deux à deux orthogonales pour la forme de Killing de \mathfrak{g} . Alors, il résulte de l'orthogonalité, pour B , du centre de \mathfrak{g} à \mathfrak{g}^{der} et du Lemme 1 (i), que :

$$B(X_n, Y) = 0, \quad Y \in \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{r}$$

En utilisant la densité dans \mathfrak{h} de la réunion de ses sous-algèbres de Cartan, on en déduit que X_n est orthogonal à \mathfrak{i} pour B . Mais \mathfrak{i} est un sous-espace isotrope pour B de dimension maximale, d'après la définition des formes de Manin. Donc X_n est élément de \mathfrak{i} comme désiré.

Ecrivons $X_n = H + R$ avec $H \in \mathfrak{h}$, $R \in \mathfrak{r}$. Comme X_n commute à \mathfrak{h} , d'après (1.3) et que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r}$, on voit que H commute à \mathfrak{h} . Donc H est nul puisque \mathfrak{h} est semi-simple. Finalement $X_n \in \mathfrak{r}$, et en fait $X_n \in \mathfrak{n}$, d'après la définition de \mathfrak{n} . Comme X appartient à un supplémentaire de $\mathfrak{a}_k + \mathfrak{n}$ dans \mathfrak{r} et que $X = X_s + X_n$, on a :

$$X_s \in \mathfrak{r}, X_s \notin \mathfrak{a}_k + \mathfrak{n}$$

On pose $\mathfrak{a}_{k+1} = \mathfrak{a}_k + \mathbb{R}X_s$. D'après (1.3) et la semi-simplicité de $ad_{\mathfrak{g}}X_s$, \mathfrak{a}_{k+1} vérifie les propriétés voulues. \square

Suite de la démonstration du Théorème 1:

On pose $\mathfrak{i}_a := \mathfrak{a}_p$, avec $p = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{r}/\mathfrak{n}$, de sorte que $\mathfrak{i} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_a \oplus \mathfrak{n}$, où \mathfrak{i}_a est formé d'éléments semi-simples de \mathfrak{g} avec :

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{i}_a] = \{0\}, \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{i}_a \oplus \mathfrak{n}$$

Comme $\mathfrak{i}_a \oplus \mathfrak{n}$ est résoluble, il existe une sous-algèbre de Borel, \mathfrak{b} , de \mathfrak{g} , contenant $\mathfrak{i}_a \oplus \mathfrak{n}$. A noter que \mathfrak{n} est contenue dans le radical nilpotent, \mathfrak{v} , de \mathfrak{b} , d'après la définition de \mathfrak{n} et les propriétés du radical nilpotent d'une sous-algèbre de Borel. Montrons que \mathfrak{i}_a est contenue dans une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , contenue dans \mathfrak{b} . En effet, d'après [Bor], Proposition 11.15, la sous-algèbre de Borel \mathfrak{b} contenant \mathfrak{i}_a , elle contient une sous-algèbre de Borel du centralisateur \mathfrak{l} de \mathfrak{i}_a dans \mathfrak{g} . Celle-ci contient une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{j} de \mathfrak{l} . Celle-ci est aussi une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} contenant \mathfrak{i}_a (cf. [Bou], Ch. VII, Paragraphe 2.3, Proposition 10).

Soit \mathfrak{u} la somme des sous espaces poids de \mathfrak{i}_a , dans \mathfrak{v} , pour des poids non nuls. Alors $\mathfrak{p} := \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ est une sous algèbre parabolique de \mathfrak{g} , contenant \mathfrak{b} . Comme \mathfrak{l} est réductive, $\mathfrak{m} := \mathfrak{l}^{der}$ est semi-simple et le radical de \mathfrak{p} est égal à la somme du centre \mathfrak{a} de \mathfrak{l} avec \mathfrak{u} . La définition de \mathfrak{u} montre que $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{u}$, donc le radical nilpotent de \mathfrak{p} est égal à \mathfrak{u} (cf. [Bou], Ch. I, Paragraphe 5.3, Théorème 1). Comme $\mathfrak{i} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_a \oplus \mathfrak{n}$, que $\mathfrak{i}_a \oplus \mathfrak{n}$ est contenu dans \mathfrak{b} et que \mathfrak{h} est contenu dans \mathfrak{l} , on a :

$$\mathfrak{i} \subset \mathfrak{p}$$

Or \mathfrak{p} (resp. \mathfrak{u}) est la somme de ses intersections \mathfrak{p}_i (resp. \mathfrak{u}_i) avec les idéaux simples \mathfrak{g}_i de \mathfrak{g} . Comme \mathfrak{p}_i est orthogonal à \mathfrak{u}_i pour la forme de Killing de \mathfrak{g}_i , on en déduit que \mathfrak{u} est orthogonal à \mathfrak{p} pour B (cf. Lemme 1 (i)). Comme \mathfrak{i} est un sous-espace isotrope pour B , de dimension maximale et contenu dans \mathfrak{p} , \mathfrak{u} est inclus dans \mathfrak{i} . Il résulte alors de la définition de \mathfrak{n} , que \mathfrak{u} est contenu dans \mathfrak{n} . Par suite, on a :

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{u} \oplus (\mathfrak{i} \cap \mathfrak{l}), \quad \mathfrak{n} = \mathfrak{u} \oplus (\mathfrak{n} \cap \mathfrak{l}) \quad (1.6)$$

Remarquons que \mathfrak{a} contient $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$. On a $\mathfrak{v} = \mathfrak{u} \oplus (\mathfrak{v} \cap \mathfrak{m})$. Comme $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{v}$ et $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{n}$, on en déduit que $\mathfrak{n} = \mathfrak{u} \oplus (\mathfrak{n} \cap \mathfrak{m})$. On déduit alors de (1.6) que : $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{l} = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{m}$. Finalement, on a :

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \oplus (\mathfrak{n} \cap \mathfrak{m}) \oplus \mathfrak{u}$$

Alors $\mathfrak{i}' := \mathfrak{i} \cap \mathfrak{m}$ est égal à $\mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{n} \cap \mathfrak{m})$. C' est une sous-algèbre isotrope de \mathfrak{m} pour la restriction de B à \mathfrak{m} , donc, d'après le Corollaire du Lemme 2 (ii), de dimension réelle inférieure ou égale à la dimension complexe de \mathfrak{m} .

De même, $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ est un sous espace isotrope de \mathfrak{a} pour la restriction de B à \mathfrak{a} . D'après le Corollaire du Lemme 2, la restriction de B à \mathfrak{a} est de signature $(\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{a}, \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{a})$. Il en résulte que la dimension de $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ est inférieure ou égale à $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{a}$. Mais $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m} + \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{a} + \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}$. Comme $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{i} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$, on déduit de ce qui précède que l'on a :

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{i}' = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}, \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{a} \quad (1.7)$$

Lemme 9 *L'algèbre de Lie $\mathfrak{n}' := \mathfrak{n} \cap \mathfrak{m}$ est réduite à zéro et \mathfrak{h} à la forme indiquée dans le Théorème.*

Démonstration : Si \mathfrak{f} est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{h} , $\mathfrak{f} + \mathfrak{n}' + \mathfrak{in}'$ est une sous-algèbre de Lie réelle et résoluble de \mathfrak{m} . On peut donc choisir une base de \mathfrak{m} , réunion de bases des idéaux simples de \mathfrak{m} , telle que, pour tout $X \in \mathfrak{f} + \mathfrak{n}' + \mathfrak{in}'$, $\text{ad}_{\mathfrak{m}} X$ soit représenté, dans cette base, par une matrice triangulaire supérieure. De plus, si X est élément de $\mathfrak{n}' + \mathfrak{in}'$, les éléments diagonaux de cette matrice sont nulles. On voit, grâce au Lemme 1 (i), que $\mathfrak{n}' + \mathfrak{in}'$ est orthogonal à $\mathfrak{f} + \mathfrak{n}'$, pour la restriction, B' , de B à \mathfrak{m} . Ceci étant vrai pour tout \mathfrak{f} , $\mathfrak{n}' + \mathfrak{in}'$ est orthogonal à $\mathfrak{i}' (= \mathfrak{h} + \mathfrak{n}')$, pour B' . Mais B' est non dégénérée, d'après le Corollaire du Lemme 2, donc, d'après le Lemme 1 (ii) et (1.7), \mathfrak{i}' est un sous-espace isotrope, pour B' , de dimension maximale de \mathfrak{m} . Il en résulte que $\mathfrak{n}' + \mathfrak{in}'$ est contenu dans \mathfrak{i}' . Mais $\mathfrak{n}' + \mathfrak{in}'$ est aussi contenu dans $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{g}^{\text{der}}$. Finalement $\mathfrak{n}' + \mathfrak{in}'$ est contenu dans l'intersection de \mathfrak{i}' avec \mathfrak{n} , d'après la définition de celui-ci. Mais, comme \mathfrak{i}' est contenu dans \mathfrak{m} , $\mathfrak{i}' \cap \mathfrak{n} = \mathfrak{n}'$. Alors on a : $\mathfrak{n}' + \mathfrak{in}' \subset \mathfrak{n}'$, c'est à dire que \mathfrak{n}' est un sous-espace vectoriel complexe de \mathfrak{g} .

Soit \mathfrak{h}_j , $j = 1, \dots, r$, les idéaux simples de \mathfrak{h} . Comme $\mathfrak{h}_j \cap i\mathfrak{h}_j$ est un idéal de l'algèbre de Lie simple réelle \mathfrak{h}_j , il y a deux possibilités pour \mathfrak{h}_j . Ou bien $\mathfrak{h}_j \cap i\mathfrak{h}_j = \{0\}$, et alors $\mathfrak{h}_j + i\mathfrak{h}_j$ est une algèbre de Lie semi-simple complexe dont \mathfrak{h}_j est une forme réelle. Ou bien $\mathfrak{h}_j \cap i\mathfrak{h}_j = \mathfrak{h}_j$ et \mathfrak{h}_j est une sous-algèbre simple complexe de \mathfrak{g} . On remarquera que cette deuxième possibilité est exclue, si B est spéciale, puisque \mathfrak{h}_j serait alors semi-simple complexe et isotrope pour B .

On suppose que, pour $j = 1, \dots, p$, $\mathfrak{h}_j \cap i\mathfrak{h}_j = \{0\}$, et que pour $j = p+1, \dots, r$, $\mathfrak{h}_j \cap i\mathfrak{h}_j = \mathfrak{h}_j$. Si $j = 1, \dots, p$, on note $\mathfrak{k}_j = \mathfrak{h}_j \oplus i\mathfrak{h}_j$. Si $j = p+1, \dots, r$, on note \mathfrak{k}_j la somme des projections de \mathfrak{h}_j dans les idéaux simples de \mathfrak{m} . On note aussi $\mathfrak{k}'_j = \mathfrak{h}_j + i\mathfrak{h}_j$, pour $j = 1, \dots, r$. On note $\mathfrak{k} = \sum_{j=1, \dots, r} \mathfrak{k}_j$ et

$\mathfrak{k}' = \sum_{j=1,\dots,r} \mathfrak{k}'_j = \mathfrak{h} + i\mathfrak{h}$, qui est contenu dans \mathfrak{k} . Par ailleurs, deux éléments, X et Y , de \mathfrak{m} commutent si et seulement si X et iY commutent (resp. X commute à chacune des projections de Y dans les idéaux simples de \mathfrak{m}). Il en résulte que, pour $j \neq l$, \mathfrak{k}_j commute à \mathfrak{h}_l , donc $\mathfrak{k}_j \cap (\sum_{l \neq j} \mathfrak{k}_l)$ est contenu dans le centre de \mathfrak{k}_j , qui est semi-simple complexe. Il en résulte que :

$$\mathfrak{k} = \oplus_{j=1,\dots,r} \mathfrak{k}_j, \quad \mathfrak{k}' = \oplus_{j=1,\dots,r} \mathfrak{k}'_j \quad (1.8)$$

Alors $\mathfrak{k}, \mathfrak{k}'$ sont des sous-algèbres de Lie semi-simples complexes de \mathfrak{m} . Montronsque :

$$\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}' = \{0\} \quad (1.9)$$

En effet \mathfrak{n}' est un idéal dans $\mathfrak{h} + \mathfrak{n}'$, puisque $\mathfrak{i}' = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{m}$ et \mathfrak{n}' est l'intersection de l'idéal \mathfrak{n} de \mathfrak{i} avec \mathfrak{m} . C'est donc un \mathfrak{h} -module, et aussi un \mathfrak{k}' -module puisque \mathfrak{n}' est un espace vectoriel complexe. Donc $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}'$ est un sous- \mathfrak{k}' -module, et aussi une sous-algèbre résoluble de \mathfrak{k} . Il est clair que les \mathfrak{k}_j sont des sous- \mathfrak{k}' -modules de \mathfrak{k} , qui n'ont aucun sous-quotient simple en commun. En effet, d'une part \mathfrak{k}'_l agit trivialement sur \mathfrak{k}_j , si $j \neq l$. D'autre part, d'après les définitions, on voit que les sous-quotients simples du \mathfrak{k}'_j -module \mathfrak{k}_j sont sous-quotients de \mathfrak{k}'_j , dont aucun n'est trivial, puisque \mathfrak{k}'_j est une algèbre de Lie semi-simple. Donc, si $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}'$ est non nul, il a une intersection non nulle, \mathfrak{k}'' , avec l'un des \mathfrak{k}_j , qui est un \mathfrak{k}'_j -sous-module. Comme \mathfrak{k}_j est une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{m} , il en va de même de \mathfrak{k}'' , qui est de plus résoluble, puisque c'est le cas de \mathfrak{n}' .

Si $j = 1, \dots, p$, $\mathfrak{k}_j = \mathfrak{k}'_j$ et un \mathfrak{k}'_j -sous-module de \mathfrak{k}_j est un idéal de \mathfrak{k}_j . Alors $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}'$ est à la fois semi-simple et résoluble. Une contradiction qui montre (1.9) dans ce cas.

Si $j = p+1, \dots, r$, $\mathfrak{k}_j = \mathfrak{h}_j$ est simple, donc l'une des projections de \mathfrak{k}'' sur un idéal simple de \mathfrak{m} est égale à \mathfrak{h}_j . Cette projection étant un morphisme d'algèbres de Lie, il en résulte que l'algèbre de Lie résoluble \mathfrak{k}'' , admet un quotient semi-simple. Une contradiction qui achève de prouver (1.9).

Pour $j = p+1, \dots, r$, \mathfrak{h}_j ne peut être contenu dans un idéal simple de \mathfrak{m} . En effet, d'après le Corollaire du Lemme 2, la restriction de B à \mathfrak{m} est une forme de Manin. D'après le Lemme 1 (ii) et le Lemme 2 (v), la restriction de B à un idéal simple de \mathfrak{m} est spéciale, et notre assertion en résulte, car pour $j = p+1, \dots, r$, \mathfrak{h}_j est isotrope et semi-simple complexe. Pour $j = p+1, \dots, r$, on notera n_j , le nombre d'idéaux simples de \mathfrak{m} dans lesquels \mathfrak{h}_j a une projection non nulle. On vient de voir que :

$$n_j \geq 2, \quad j = p+1, \dots, r \quad (1.10)$$

Montrons que $\mathfrak{n}' = \{0\}$.

On a évidemment :

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{i}' = \left(\sum_{j=1,\dots,r} \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_j \right) + \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{n}'$$

Alors, en posant $p_j = 1$, pour $j = 1, \dots, p$ et $p_j = 2$, pour $j = p+1, \dots, r$, on a :

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{i}' = \left(\sum_{j=1,\dots,r} p_j \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{k}'_j \right) + \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{n}' \quad (1.11)$$

Par ailleurs on a, grâce à (1.7) et (1.9) :

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{i}' = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m} \geq \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{k} + \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{n}') \quad (1.12)$$

En posant $n_j = 1$ pour $j = 1, \dots, p$, on a immédiatement :

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{k}) = \sum_{j=1, \dots, r} n_j \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{k}'_j \quad (1.13)$$

Comme n_j est supérieur ou égal à p_j , pour tout j , d'après (1.10), on déduit que l'inégalité dans (1.12) est une égalité et que :

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{n}' \text{ et } p_j = q_j, \quad j = 1, \dots, r$$

La projection de \mathfrak{k} sur un idéal simple de \mathfrak{m} est égal à celle de \mathfrak{k}' , d'après la définition de \mathfrak{k} . La projection de l'égalité ci-dessus montre que chaque idéal simple de \mathfrak{m} , est la somme (pas nécessairement directe) de la projection de \mathfrak{k}' et de celle de \mathfrak{n}' . Comme on voit facilement que \mathfrak{n}' est un idéal de $\mathfrak{k}' + \mathfrak{n}'$, la projection de \mathfrak{n}' apparaît comme un idéal résoluble de cette algèbre de Lie semi-simple, donc elle est nulle. Il en résulte que :

$$\mathfrak{n}' = \{0\}$$

comme désiré. En outre $\mathfrak{m} = \mathfrak{k}$, donc les \mathfrak{k}_j sont des idéaux de \mathfrak{m} . On pose $\tilde{\mathfrak{m}}_0 = \oplus_{j=1, \dots, p} \mathfrak{k}_j$, $\tilde{\mathfrak{h}}_0 = \oplus_{j=1, \dots, p} \mathfrak{h}_j$. On pose $q = r - p$. Pour $l = 1, \dots, q$, \mathfrak{k}_l est somme de deux idéaux simples, \mathfrak{m}'_l , \mathfrak{m}''_l , car $n_{p+l} = 2$. La projection de \mathfrak{h}_{l+p} sur chacun de ces idéaux est bijective, sa surjectivité résultant de la définition de \mathfrak{k}_l , son injectivité résultant de la simplicité de \mathfrak{h}_{l+p} et de la non nullité de ce morphisme d'algèbres de Lie. Donc $\mathfrak{h}_{p+l} := \{(X, \pi(X)) | X \in \mathfrak{m}'_l\}$, où π est un isomorphisme \mathbb{C} -linéaire de l'algèbre de Lie \mathfrak{m}'_l sur \mathfrak{m}''_l . Donc \mathfrak{h} a la forme voulue \square

Lemme 10 *Aucun poids non nul de \mathfrak{a} dans \mathfrak{g} n'est nul sur $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$.*

Démonstration : Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un poids non nul α de \mathfrak{a} dans \mathfrak{g} , nul sur $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$. Soit $H_{\alpha} \in \mathfrak{a}$ tel que :

$$K_{\mathfrak{g}}(H_{\alpha}, X) = \alpha(X), \quad X \in \mathfrak{a} \quad (1.14)$$

Alors H_{α} appartient à l'un des idéaux simples de \mathfrak{g} . En effet, soit \mathfrak{j} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , contenant \mathfrak{a} . Alors α est la restriction à \mathfrak{a} d'une racine β de \mathfrak{j} dans \mathfrak{g} et l'on a :

$$K_{\mathfrak{g}}(H_{\alpha}, H_{\alpha}) > 0 \quad (1.15)$$

Soit $H_{\beta} \in \mathfrak{j}$ tel que :

$$K_{\mathfrak{g}}(H_{\beta}, X) = \beta(X), \quad X \in \mathfrak{j}$$

Alors \mathfrak{j} (resp. \mathfrak{a}) est la somme directe de ses intersections avec les idéaux simples de \mathfrak{g} , et H_β (resp. H_α) appartient à l'une de celles-ci. On déduit alors du Lemme 1 (i), qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}$, non nul car B est non dégénérée, tel que :

$$B(\lambda H_\alpha, X) = \text{Im}(K_{\mathfrak{g}}(\lambda \mu H_\alpha, X)), \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad X \in \mathfrak{g} \quad (1.16)$$

Comme α est nulle sur \mathfrak{i}_a , il résulte de (1.14) et (1.16) que $\mathbb{C}H_\alpha$ est orthogonale à \mathfrak{i}_a , pour B . Comme B est une forme de Manin, la restriction de B à \mathfrak{a} est de signature $(\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{a}, \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{a})$. Tenant compte de (1.7), on voit que \mathfrak{i}_a est un sous-espace de \mathfrak{a} , isotrope pour B , de dimension maximale. Alors, ce qui précède montre que $\mathbb{C}H_\alpha$ est contenu dans \mathfrak{i}_a . Par ailleurs, si λ est une racine carrée de $i\mu^{-1}$, $B(\mu H_\alpha, \mu H_\alpha)$ est non nul d'après (1.15) et (1.16). Une contradiction avec le fait que \mathfrak{i}_a est isotrope qui achève de prouver le Lemme. \square

Fin de la démonstration du Théorème 1:

Montrons la propriété suivante :

Toute sous-algèbre parabolique \mathfrak{q} de \mathfrak{g} est égale au normalisateur dans \mathfrak{g} de son radical nilpotent \mathfrak{w} (1.17)

D'abord \mathfrak{q} normalise \mathfrak{w} . Donc, le normalisateur \mathfrak{r} de \mathfrak{w} dans \mathfrak{g} contient \mathfrak{q} . C'est donc une sous-algèbre parabolique de \mathfrak{g} , qui contient \mathfrak{w} comme idéal. Compte tenu de [Bou], Ch. I, Paragraphe 5.3, Remarque 2, \mathfrak{w} est contenu dans le radical nilpotent, \mathfrak{x} , de \mathfrak{r} . On a alors : $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{r}$, $\mathfrak{w} \subset \mathfrak{x}$, d'où l'on déduit facilement que $\mathfrak{x} = \mathfrak{w}$ et $\mathfrak{r} = \mathfrak{q}$, comme désiré. Donc \mathfrak{q} est bien le normalisateur de \mathfrak{n} . Ceci achève de prouver (1.17).

Montrons que \mathfrak{n} est le radical nilpotent de \mathfrak{i} . En effet, comme \mathfrak{n} est somme de sous-espaces poids sous \mathfrak{a} et qu'aucun de ces poids n'est nul sur \mathfrak{i}_a , d'après le Lemme précédent, on a :

$$[\mathfrak{i}_a, \mathfrak{n}] = \mathfrak{n}$$

Donc $[\mathfrak{i}, \mathfrak{i}] = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ et l'intersection de $[\mathfrak{i}, \mathfrak{i}]$ avec le radical $\mathfrak{r} = \mathfrak{i}_a + \mathfrak{n}$ de \mathfrak{i} est égal à \mathfrak{n} . Donc, d'après [Bou] Ch. I, Paragraphe 5.3, Théorème 1, \mathfrak{n} est bien le radical nilpotent de \mathfrak{i} . On a donc montré que \mathfrak{i} s'écrit de la manière voulue, pour une décomposition de Langlands particulière du normalisateur, \mathfrak{p} , de \mathfrak{n} . Si $\mathfrak{p} = \mathfrak{l}' \oplus \mathfrak{n}$ est une autre décomposition de Langlands de \mathfrak{p} , \mathfrak{l} et \mathfrak{l}' sont isomorphes, puisqu'elles sont toutes les deux isomorphes à $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$. Comme \mathfrak{i} contient \mathfrak{n} , les intersections de \mathfrak{i} avec \mathfrak{l} et \mathfrak{l}' se correspondent dans cet isomorphisme, et la décomposition de \mathfrak{i} qu'on en déduit, relativement à cette nouvelle décomposition de Langlands de \mathfrak{p} , a les propriétés voulues.

Etudions la partie réciproque du Théorème. Une sous-algèbre parabolique de \mathfrak{g} est la somme de ses intersections avec les idéaux simples de \mathfrak{g} . En outre, elle est orthogonale à son radical nilpotent, pour la forme de Killing de \mathfrak{g} . On conclut que si \mathfrak{i} a une décomposition comme dans l'énoncé, elle est isotrope pour B , et de dimension réelle égale à la dimension complexe de \mathfrak{g} . \square

Définition 3 *On rappelle qu'une sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple réelle est une sous-algèbre de Cartan fondamentale si et seulement si elle contient des éléments réguliers dont l'image par la représentation adjointe n'a que des valeurs propres imaginaires pures. Cela équivaut au fait qu'aucune racine de cette sous-algèbre de Cartan n'est réelle. Une sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie réelle est dite fondamentale si sa projection dans une sous-algèbre de Levi, parallèlement au radical, est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de cette algèbre de Lie semi-simple réelle.*

Comme toutes les sous-algèbres de Cartan fondamentales d'une algèbre de Lie réelle semi-simple sont conjuguées entre elles par des automorphismes intérieurs, il en va de même pour les sous-algèbres de Cartan fondamentales d'une algèbre de Lie réelle. En effet il suffit d'adapter la preuve du fait que (ii) implique (i), dans [Bou], Ch. VII, Paragraphe 3.5, Proposition 5, en remarquant pour cela que tout automorphisme intérieur d'une algèbre de Levi d'une algèbre de Lie réelle, s'étend en un automorphisme intérieur de l'algèbre de Lie.

Lemme 11 *On conserve les hypothèses et notations du Théorème 1.*

- (i) *Si \mathfrak{f} est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{h} , il existe des éléments réguliers de \mathfrak{g} contenus dans $\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$. Le centralisateur dans $\mathfrak{g}, \mathfrak{j}$, de $\tilde{\mathfrak{f}} := \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , contenue dans \mathfrak{l} , vérifiant $\mathfrak{j} = (\mathfrak{j} \cap \mathfrak{m}) \oplus \mathfrak{a}$.*
- (ii) *Si \mathfrak{f} est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{h} , $\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{i} .*
- (iii) *Toute sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{i} (resp. sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{i} contenue dans $\mathfrak{h} + \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$) est conjuguée, par un automorphisme intérieur de \mathfrak{i} , (resp. égale) à une algèbre de ce type.*
- (iv) *Soit $\tilde{\mathfrak{f}}'$ une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{i} . Il existe une unique décomposition de Langlands $\mathfrak{l}' + \mathfrak{n}$ de \mathfrak{p} , telle que \mathfrak{l}' contienne $\tilde{\mathfrak{f}}'$. Alors, notant $\mathfrak{f}' := \tilde{\mathfrak{f}}' \cap \mathfrak{l}'^{\text{der}}$, on a $\tilde{\mathfrak{f}}' = \mathfrak{f}' + (\mathfrak{i} \cap \mathfrak{a}')$, où \mathfrak{a}' est le centre de \mathfrak{l}' . De plus \mathfrak{f}' est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de \mathfrak{i} , si et seulement si $\tilde{\mathfrak{f}}'$ est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{h}' := \mathfrak{i} \cap \mathfrak{l}'^{\text{der}}$*

Démonstration :

Montrons (i). On raisonne par l'absurde. On note \mathfrak{j}' une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , qui contient $\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{a}$. Celle-ci existe puisque les éléments de $\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{a}$ sont semi-simples. Supposons qu'aucun élément de $\tilde{\mathfrak{f}} := \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ ne soit régulier dans \mathfrak{g} . Alors, pour tout $X \in \tilde{\mathfrak{f}}$, il existe une racine α_X de \mathfrak{j}' dans \mathfrak{g} , nulle sur X . Pour une racine donnée, l'intersection de son noyau avec $\tilde{\mathfrak{f}}$ est un fermé de $\tilde{\mathfrak{f}}$. Notre hypothèse montre que $\tilde{\mathfrak{f}}$ est la réunion de ces fermés. Il en résulte que l'un de ces sous-espaces vectoriels est d'intérieur non vide, donc égal à $\tilde{\mathfrak{f}}$. Cela signifie qu'une racine de \mathfrak{j}' s'annule sur $\tilde{\mathfrak{f}}$. Alors, d'après le Lemme 7, dont on vérifie aisément qu'il est valable pour toute décomposition de Langlands de \mathfrak{p} , celle-ci doit être nulle sur \mathfrak{a} . C'est donc une racine de \mathfrak{j}' dans \mathfrak{m} , qui ne peut être nulle sur \mathfrak{f} . Une contradiction qui prouve la première partie de

(i). Le centralisateur j de \tilde{f} est donc une sous-algèbre de Cartan. Par ailleurs j contient \mathfrak{a} . On en déduit la deuxième partie de (i).

D'après le Lemme 7, le nilspace de \tilde{f} dans \mathfrak{n} est réduit à zéro. Comme f est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{h} , le nilspace de \tilde{f} dans \mathfrak{h} est égal à f . Finalement le nilspace de \tilde{f} dans \mathfrak{i} est égal à \tilde{f} . Alors (ii) résulte de [Bou], Ch. VII, Paragraphe 2.1, Proposition 3.

Montrons (iii). Soit \tilde{f}' une autre sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{i} . La projection, \tilde{f}'' , de \tilde{f}' sur $\tilde{\mathfrak{h}} := \mathfrak{h} + \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$, parallèlement à \mathfrak{n} , est une sous-algèbre de Cartan de $\tilde{\mathfrak{h}}$ (cf. [Bou], Ch. VII, Paragraphe 2.1, Corollaire 2 de la Proposition 4), donc de la forme $f' + \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$, où f' est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{h} . Alors \tilde{f}' et \tilde{f}'' sont deux sous algèbres de Cartan de \mathfrak{i} , ayant la même projection sur $\tilde{\mathfrak{h}}$, parallèlement à \mathfrak{n} , donc conjuguées par un automorphisme intérieur de \mathfrak{i} , d'après [Bou], Ch. VII, Paragraphe 3.5, Proposition 5 (voir aussi après la Définition 3). Si de plus \tilde{f}' est contenue dans $\tilde{\mathfrak{h}}$, le raisonnement ci-dessus montre qu'elle a la forme indiquée. Ce qui prouve (iii).

Prouvons (iv). Grâce à (iii), on se ramène, par conjugaison, au cas où \tilde{f}' est contenue dans \mathfrak{l} et comme dans (i). Si $\mathfrak{l}' + \mathfrak{n}$ est une décomposition de Langlands de \mathfrak{p} , où \mathfrak{l}' contient \tilde{f}' , \mathfrak{l}' contient un élément régulier de \mathfrak{g} , contenu dans \tilde{f}' , dont le centralisateur dans \mathfrak{g} est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , contenue dans \mathfrak{l}' . Celle-ci est égale au centralisateur dans \mathfrak{g} de \tilde{f}' . D'où l'unicité de \mathfrak{l}' , grâce aux propriétés des décompositions de Langlands (cf. Lemme 3 (i)). L'assertion sur les sous-algèbres de Cartan fondamentales est claire car \mathfrak{h}' est une sous-algèbre de Levi de \mathfrak{i} , d'après le Théorème 1. \square

2 Triples de Manin pour une algèbre de Lie réductive complexe : Descente

Dans toute la suite \mathfrak{g} désignera une algèbre de Lie réductive complexe. On fixe, j_0 , une sous algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , \mathfrak{b}_0 une sous-algèbre de Borel de \mathfrak{g} , contenant j_0 . On note \mathfrak{b}'_0 la sous-algèbre de Borel opposée à \mathfrak{b}_0 , relativement à j_0 .

Définition 4 *Un triple de Manin pour \mathfrak{g} est un triplet $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$, où B est une forme de Manin sur \mathfrak{g} , \mathfrak{i} et \mathfrak{i}' sont des sous-algèbres de Lie réelles de \mathfrak{g} , isotropes pour B , telles que $\mathfrak{g} =: \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{i}'$. La signature de B étant égale à $(\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}, \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g})$, \mathfrak{i} et \mathfrak{i}' sont Lagrangiennes. Un s-triple est un triple de Manin pour lequel la forme est spéciale.*

Si \mathfrak{i} est sous \mathfrak{p} et \mathfrak{i}' est sous \mathfrak{p}' , on dit que le triple de Manin est sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$

Remarque 1 *D'après le Lemme 2 (v), si \mathfrak{g} est simple, la notion de s-triple et de triple de Manin coïncident.*

On note G le groupe connexe, simplement connexe, d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Si \mathfrak{s} est une sous-algèbre de \mathfrak{g} , on note S le sous-groupe analytique de G ,

d'algèbre de Lie \mathfrak{s} . Comme \mathfrak{g} est complexe, les sous-groupes paraboliques de \mathfrak{g} sont connexes (cf. [Bor], Théorème 11.16). Donc, si \mathfrak{p} est une sous-algèbre parabolique de \mathfrak{g} , P est le sous-groupe parabolique de G , d'algèbre de Lie \mathfrak{p} . On remarque que G agit sur l'ensemble des triples de Manin, en posant, pour tout triple de Manin $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ et tout $g \in G$:

$$g(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}') := (B, \text{Ad } g(\mathfrak{i}), \text{Ad } g(\mathfrak{i}'))$$

Notre but est construire, par récurrence sur la dimension de \mathfrak{g}^{der} , tous les triples de Manin modulo cette action de \mathfrak{g} .

Proposition 1 *Tout triple de Manin est conjugué, sous l'action de G , à un triple de Manin $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, avec $\mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{b}'_0 \subset \mathfrak{p}'$ (un tel triple de Manin sera dit standard).*

De plus \mathfrak{p} et \mathfrak{p}' sont uniques.

Démonstration :

Montrons d'abord que :

$$\begin{aligned} L' \text{ intersection de deux sous-algèbres de Borel de } \mathfrak{g}, \underline{\mathfrak{h}}, \underline{\mathfrak{h}}', \\ \text{contient une sous-algèbre de Cartan de } \mathfrak{g} \end{aligned} \quad (2.1)$$

On a d'abord $\underline{\mathfrak{h}}' = \text{Ad } g(\underline{\mathfrak{h}})$, pour un élément g de G . Soit \mathfrak{j} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , contenue dans $\underline{\mathfrak{h}}$ et W un ensemble de représentants dans \mathfrak{g} du groupe de Weyl de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{j})$. La décomposition de Bruhat implique qu'il existe $b, b_1 \in \underline{B}$ et $w \in W$ tels que : $g = bw b_1$. Alors $\mathfrak{j} := \text{Ad } b(\mathfrak{j})$ est contenue dans $\underline{\mathfrak{h}}$, puisque \underline{B} normalise $\underline{\mathfrak{h}}$. Comme W normalise \mathfrak{j} , on a aussi $\mathfrak{j} = \text{Ad } b(w(\mathfrak{j}))$. Mais $\underline{\mathfrak{h}}' = \text{Ad } bw(\underline{\mathfrak{h}})$, puisque $b_1 \in \underline{B}$, normalise $\underline{\mathfrak{h}}$. Finalement \mathfrak{j} est contenue dans $\underline{\mathfrak{h}} \cap \underline{\mathfrak{h}}'$, comme désiré.

Soit $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ un triple de Manin sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$. Soit $\underline{\mathfrak{h}}$ (resp. $\underline{\mathfrak{h}}'$) une sous-algèbre de Borel de \mathfrak{g} , contenue dans $\underline{\mathfrak{p}}$ (resp. $\underline{\mathfrak{p}}'$).

On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{i} + \mathfrak{i}' \subset \underline{\mathfrak{p}} + \underline{\mathfrak{p}}'$. Donc $\underline{\mathfrak{p}} + \underline{\mathfrak{p}}'$ est égal à \mathfrak{g} et $\underline{P} \underline{P}'$ est ouvert dans G . Mais $\underline{P} \underline{P}'$ est réunion de $(\underline{B}, \underline{B}')$ -doubles classes, qui sont en nombre fini (Bruhat). L'une de ces doubles classes contenues dans $\underline{P} \underline{P}'$ doit donc être ouverte. Soit $p \in \underline{P}$ et $p' \in \underline{P}'$, tels que $\underline{B} p p' \underline{B}'$ soit un ouvert de G . On pose $B_1 = p^{-1} \underline{B} p$, $B'_1 = p' \underline{B}' p'^{-1}$. Alors le sous-groupe de Borel de G , B_1 (resp. B'_1), est contenu dans P (resp. P') et $B_1 B'_1$ est ouvert dans G . Donc, on a $\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}'_1 = \mathfrak{g}$ et l'intersection de \mathfrak{b}_1 et \mathfrak{b}'_1 contient une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , \mathfrak{j}_1 (voir ci-dessus). Pour des raisons de dimension, cette intersection est réduite à \mathfrak{j}_1 . Alors \mathfrak{b}_1 et \mathfrak{b}'_1 sont opposées relativement à \mathfrak{j}_1 . D'après [Bor], Proposition 11.19, il existe $g' \in G$ tel que $\text{Ad } g'(\mathfrak{b}_1) = \mathfrak{b}_0$, $\text{Ad } g'(\mathfrak{j}_1) = \mathfrak{j}_0$. Alors $\text{Ad } g'(\mathfrak{b}'_1)$ est égal à \mathfrak{b}'_0 . Alors, notant $\mathfrak{i} = \text{Ad } g'(\mathfrak{i})$, $\mathfrak{i}' = \text{Ad } g'(\mathfrak{i}')$, on voit que $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ vérifie les propriétés voulues.

L'unicité de \mathfrak{p} résulte du fait que deux sous-algèbres paraboliques de \mathfrak{g} , conjuguées par un élément de G et contenant une même sous-algèbre de Borel, sont égales (cf. [Bor], Corollaire 11.17). \square

On fixe désormais \mathfrak{p} (resp. \mathfrak{p}') une sous-algèbre parabolique de \mathfrak{g} , contenant \mathfrak{b}_0 (resp. \mathfrak{b}'_0). On note $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$ (resp. $\mathfrak{p}' = \mathfrak{l}' \oplus \mathfrak{n}'$) la décomposition de Langlands de \mathfrak{p} (resp. \mathfrak{p}') telle que \mathfrak{l} (resp. \mathfrak{l}') contienne \mathfrak{j}_0 (cf. Lemme 3). On note $\mathfrak{m} = \mathfrak{l}^{der}$, \mathfrak{a} le centre de \mathfrak{l} . Si \mathfrak{i} est une sous-algèbre de Lie réelle de \mathfrak{g} , Lagrangienne pour une forme de Manin, on notera $\mathfrak{h} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{m}$, $\mathfrak{i}_a = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{a}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_a$. On introduit des notations similaires pour \mathfrak{p}' .

Comme $\mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{p}$ (resp. $\mathfrak{b}'_0 \subset \mathfrak{p}'$), \mathfrak{n} (resp. \mathfrak{n}') est contenu dans le radical nilpotent de \mathfrak{b}_0 (resp. \mathfrak{b}'_0). Ces derniers sont d'intersection réduite à zéro, donc :

$$\mathfrak{n} \cap \mathfrak{n}' = \{0\} \quad (2.2)$$

Décomposant $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}'$ en sous-espaces poids sous \mathfrak{j}_0 , on voit que :

$$\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}' = (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}') \oplus (\mathfrak{n} \cap \mathfrak{l}') \oplus (\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{l}). \quad (2.3)$$

Proposition 2 (i) Si un élément de G conjugue deux triples de Manin sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, c'est un élément de $P \cap P'$.

(ii) Le groupe $L \cap L'$ est égal au sous-groupe analytique de G , d'algèbre de Lie $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$. Notons $N_{L'}$ (resp. N'_L), le sous-groupe analytique de G , d'algèbre de Lie $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{l}'$ (resp. $\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{l}$). Alors on a :

$$P \cap P' = (L \cap L') N_{L'} N'_L$$

De plus $N_{L'}$ et N'_L commutent entre eux.

Démonstration :

Si $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ et $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ sont deux triples de Manin sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, conjugués par un élément, g , de G , celui-ci conjugue le radical nilpotent de \mathfrak{i} avec celui de \mathfrak{i}' , donc normalise \mathfrak{n} , puisque les deux triples de Manin sont sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$. Mais un élément du normalisateur, Q , dans G de \mathfrak{n} , normalise le normalisateur dans \mathfrak{g} de \mathfrak{n} , c'est à dire \mathfrak{p} , comme on l'a vu plus haut (cf. (1. 17)). Comme P est connexe, les éléments de Q normalisent P . Donc Q est inclus dans P et $g \in P$. De même, on a $g \in P'$. D'où (i)
Montrons (ii). Il est clair que $P \cap P'$ est un sous-groupe de Lie de G , d'algèbre de Lie $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}'$. On a :

$$[\mathfrak{n} \cap \mathfrak{l}', \mathfrak{n}' \cap \mathfrak{l}] \subset [\mathfrak{n}, \mathfrak{l}] \cap [\mathfrak{n}', \mathfrak{l}'] \subset \mathfrak{n} \cap \mathfrak{n}'$$

Donc $N_{L'}$ et N'_L commutent entre eux, d'après (2.1). Alors $(L \cap L')^0 N_{L'} N'_L$ est un sous-groupe ouvert et connexe de $P \cap P'$, donc on a :

$$(P \cap P')^0 = (L \cap L')^0 N_{L'} N'_L \quad (2.4)$$

Soit $g \in P \cap P'$. Alors $Ad g(\mathfrak{j}_0)$ est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , contenue dans $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}'$, c'est donc une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}'$ (cf [Bou], Ch. VIII, Paragraphe 2.1, Exemple 3), donc conjugué, par un élément g' de $(P \cap P')^0$,

à j_0 , puisqu'il s'agit d'algèbres de Lie complexes. Donc $Ad\ g'g(j_0) = j_0$ et $g'g$ est un élément de $P \cap P'$. En utilisant la décomposition de Bruhat de G et P , pour B_0 , on voit que $g'g$ centralise le centre \mathfrak{a} de \mathfrak{l} . De même on voit que $g'g$ centralise le centre \mathfrak{a}' de \mathfrak{l}' . Donc $g'g$ est un élément du centralisateur, L'' , de $\mathfrak{a} + \mathfrak{a}'$ dans G . Mais $P'' := L''(N'_L N_{L'})$, est une décomposition de Langlands du sous-groupe parabolique de G , d'algèbre de Lie :

$$\mathfrak{p}'' = (\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{l}) \oplus \mathfrak{n} = (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}') \oplus (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{n}') \oplus \mathfrak{n}$$

Or P'' est connexe, puisque G est complexe. Donc L'' est connexe. Par ailleurs, il contient $L \cap L'$ et a même algèbre de Lie que $L \cap L'$. Donc on a :

$$L'' = L \cap L' = (L \cap L')^0 \quad (2.5)$$

On conclut alors que $g'g \in (L \cap L')^0$. Donc g est un élément de $(P \cap P')^0$. Ce qui précède montre que :

$$P \cap P' = (P \cap P')^0$$

On achève de prouver (ii), grâce à (2.4) et (2.5). \square

Le Lemme suivant est une conséquence facile de résultats de Gantmacher (cf. [G]).

Lemme 12 *Si σ et σ' sont deux automorphismes involutifs et antilinéaires d'une algèbre de Lie semi-simple complexe, \mathfrak{m} , celle-ci contient au moins un élément non nul et invariant par ces deux involutions*

Démonstration :

Avec nos hypothèses $\sigma\sigma'$ est un automorphisme \mathbb{C} -linéaire de \mathfrak{m} , dont l'espace des points fixes, $\mathfrak{m}^{\sigma\sigma'}$, est un espace vectoriel complexe, non réduit à zéro d'après [G], Théorème 28. Mais $\mathfrak{m}^{\sigma\sigma'}$, est égal à $\{X \in \mathfrak{m} \mid \sigma(X) = \sigma'(X)\}$ donc aussi égal à $\mathfrak{m}^{\sigma'\sigma}$. Si $X \in \mathfrak{m}^{\sigma\sigma'}$, on a donc $\sigma'(\sigma(X)) = X$, soit encore $\sigma'(\sigma(X)) = \sigma(\sigma(X))$. Donc $\sigma(X)$ est élément de $\mathfrak{m}^{\sigma\sigma'}$. Par suite σ , restreint à $\mathfrak{m}^{\sigma\sigma'}$ est une involution antilinéaire de $\mathfrak{m}^{\sigma\sigma'}$. L'ensemble de ses points fixes est une forme réelle de $\mathfrak{m}^{\sigma\sigma'}$, donc il est non réduit à zéro. Mais cet ensemble est égal à $\mathfrak{m}^\sigma \cap \mathfrak{m}^{\sigma'}$. \square

Proposition 3 *Si σ et σ' sont deux af-involutions d'une algèbre de Lie semi-simple complexe, \mathfrak{m} , elle contient au moins un élément non nul et invariant par ces deux involutions.*

Démonstration :

On note \mathfrak{m}_j , $j = 1, \dots, r$, les idéaux simples de \mathfrak{m} . On définit une involution θ de $\{1, \dots, r\}$ caractérisée par : $\sigma(\mathfrak{m}_j) = \mathfrak{m}_{\theta(j)}$, $j = 1, \dots, r$. Nous allons d'abord étudier le cas suivant :

$$Il\ existe\ j\ tel\ que\ \theta(j) = \theta'(j) = j \quad (2.6)$$

Dans ce cas, la restriction de σ et σ' à \mathfrak{m}_j , sont deux automorphismes involutifs et antilinéaires de \mathfrak{m} , d'après le Corollaire du Lemme 6, qui ont des points fixes non nuls en commun, d'après le Lemme précédent. La Proposition en résulte, dans ce cas.

Supposons maintenant :

$$\text{Il existe } j \text{ tel que } \theta(j) = \theta'(j) \neq j \quad (2.7)$$

On note $j' := \theta(j)$. Il est clair que : $(\mathfrak{m}_j \times \mathfrak{m}_{j'})^\sigma = \{(X, \sigma(X)) | X \in \mathfrak{m}_j\}$ et de même pour $(\mathfrak{m}_j \times \mathfrak{m}_{j'})^{\sigma'}$. Il existe un élément non nul, X de \mathfrak{m}_j tel que $(\sigma'^{-1}\sigma)(X) = X$, car $\sigma'^{-1}\sigma$ est un automorphisme \mathbb{R} -linéaire de \mathfrak{m}_j (cf. [G], Théorème 28). Alors $(X, \sigma(X))$ est un élément non nul de $(\mathfrak{m}_j \times \mathfrak{m}_{j'})^\sigma \cap (\mathfrak{m}_j \times \mathfrak{m}_{j'})^{\sigma'}$, ce qui prouve la Proposition dans ce cas. Il nous reste à étudier le cas suivant :

$$\text{Pour tout } j, \theta(j) \neq \theta'(j) \quad (2.8)$$

On construit, pour tout j , par récurrence sur n , une suite $j_1 = j, j_2, \dots, j_n, \dots$, telle que :

$$\text{pour tout } n, j_{n+1} \neq j_n \quad (2.9)$$

$$\text{pour tout } n, j_{n+1} = \theta(j_n) \text{ ou } \theta'(j_n) \quad (2.10)$$

Plus précisément, on pose

$$j_2 = \theta(1) \text{ si } \theta(1) \neq 1, j_2 = \theta'(1) \text{ sinon} \quad (2.11)$$

et, pour $n \geq 2$, on pose :

$$\begin{aligned} j_{n+1} &= \theta(j_n) \text{ si } j_n = \theta'(j_{n-1}) \text{ et } \theta(j_n) \neq j_n \\ j_{n+1} &= \theta'(j_n) \text{ si } j_n = \theta'(j_{n-1}) \text{ et } \theta(j_n) = j_n \\ j_{n+1} &= \theta'(j_n) \text{ si } j_n = \theta(j_{n-1}) \text{ et } \theta'(j_n) \neq j_n \\ j_{n+1} &= \theta(j_n) \text{ si } j_n = \theta(j_{n-1}) \text{ et } \theta'(j_n) = j_n \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ces relations définissent la suite (j_n) , car, à cause de (2.8), on a nécessairement $\theta(j_n) \neq \theta'(j_n)$ et $\theta(j_{n-1}) \neq \theta'(j_{n-1})$. Par ailleurs les relations (2.9) et (2.10) sont vérifiées, la première résultant d'une récurrence immédiate. On obtient également les relations suivantes :

$$\text{Pour } n \geq 2, \text{ si } \theta(j_n) \neq j_n \text{ et si } \theta'(j_n) \neq j_n \text{ on a :}$$

$$(j_{n-1}, j_n, j_{n+1}) \text{ est égal à } (\theta(j_n), j_n, \theta'(j_n)) \text{ ou à } (\theta'(j_n), j_n, \theta(j_n)) \quad (2.13)$$

$$\text{Pour } n \geq 2 \text{ et si } \theta(j_n) = j_n \text{ ou si } \theta'(j_n) = j_n \text{ on a : } j_{n-1} = j_{n+1} \quad (2.14)$$

Après renumérotation des \mathfrak{g}_j , on peut supposer que le début de la suite (j_n) , s'écrit $j_1 = 1, j_2 = 2, \dots, j_p = p, j_{p+1} = k < p$

On fait d'abord la convention suivante :

$$\text{S'il existe } j \text{ tel que } \theta(j) = j \text{ ou } \theta'(j) = j, \text{ on suppose qu'on}$$

l' a choisi comme premier élément, et, quitte à échanger le rôle de θ et θ' , qu'il est fixé par θ . On a alors $\theta(1) = 1$, $\theta'(1) = 2$ (2.15)

Traitons le cas où $p = 2$. Alors $j_1 = j_3$, et (2.8), (2.13) montrent que $\theta(2)$ ou $\theta'(2)$ est égal à 2. Alors on doit avoir $\theta(1) = 1$, d'après (2.15), puis $\theta'(1) = 2$ d'après (2.11). Comme $\theta'(1) = 2$, on a nécessairement $\theta(2) = 2$. Dans ce cas, un élément $(X_1, X_2) \in \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$ est invariant par σ et σ' si et seulement si on a :

$$X_1 = \sigma(X_1), \quad X_2 = \sigma(X_2), \quad X_2 = \sigma'(X_1)$$

ce qui équivaut au système :

$$X_1 = \sigma(X_1), \quad X_1 = (\sigma'^{-1}\sigma\sigma')(X_1), \quad X_2 = \sigma'(X_1)$$

Mais la restriction de σ à \mathfrak{m}_1 (resp. \mathfrak{m}_2) est un automorphisme involutif antilinéaire, puisque $\theta(1) = 1$ et $\theta(2) = 2$ (cf. le Corollaire du Lemme 6). De plus, la restriction de σ' à \mathfrak{m}_1 est soit \mathbb{C} -linéaire, soit antilinéaire, d'après le Lemme 6. Alors, la restriction de $\sigma'^{-1}\sigma\sigma'$ à \mathfrak{m}_1 est un automorphisme involutif antilinéaire. Alors, dans le cas $p = 2$, la Proposition résulte du Lemme 12.

On suppose maintenant :

$$p > 2 \tag{2.16}$$

On remarque d'abord que :

$$\text{Si } j = 2, \dots, p-1, \text{ on a } \theta(j) \neq j \text{ et } \theta'(j) \neq j \tag{2.17}$$

En effet, si on avait par exemple $\theta(j) = j$, (2.14) conduirait à $j - 1 = j + 1$ une contradiction qui prouve (2.17).

Montrons maintenant que :

$$k = 1 \text{ ou } p-1 \tag{2.18}$$

Supposons $k \neq 1$. Alors, on a $1 < k \leq p-1$. Alors d'après (2.13) et (2.14), on a l'égalité d'ensembles :

$$\{\theta(k), \theta'(k)\} = \{k-1, k+1\}, \tag{2.19}$$

ce qui implique :

$$\theta(k) \neq k, \quad \theta'(k) \neq k \tag{2.20}$$

Comme $j_{p+1} = k$, on déduit de (2.20) et (2.13) que la séquence (j_p, j_{p+1}, j_{p+2}) est égale soit à $(\theta(k), k, \theta'(k))$, soit à $(\theta'(k), k, \theta(k))$, c'est à dire , grâce à (2.19), soit à $(k-1, k, k+1)$, soit à $(k+1, k, k-1)$. Mais $j_p = p$, est différent de $k-1$. Donc $p = k+1$, i.e. $k = p-1$. Ceci achève de prouver (2.18).

Traitons d'abord le cas :

$$k = 1 \tag{2.21}$$

Comme $p > 2$, on a $1 \neq p-1$. Donc $j_{p-1} = p-1$, est différent de $j_{p+1} = 1$. (2.14), (2.13) impliquent l'égalité d'ensembles :

$$\{\theta(p), \theta'(p)\} = \{p-1, 1\} \quad (2.22)$$

Supposons, d'abord que $\theta'(1) = 2$, ce qui implique, d'après (2.11), que $\theta(1) = 1$. Comme $p > 2$, ni $\theta(p)$, ni $\theta'(p)$ ne peut être égal à 1. Une contradiction avec l'équation précédente qui montre que l'on doit avoir, d'après (2.11) :

$$\theta(1) = 2 \quad (2.23)$$

Comme $p > 2$, la seule possibilité laissée par (2.22) est :

$$\theta(p-1) = p \text{ et } \theta'(p) = 1 \quad (2.24)$$

On déduit de (2.23) et (2.17), joints à (2.13), que, pour $j = 1, \dots, p-1$, on a :

$$\theta(j) = j+1, \text{ si } j \text{ est impair (resp. } \theta'(j) = j+1 \text{ si } j \text{ est pair)} \quad (2.25)$$

ce qui, joint à (2.24), implique que p est pair. Notons $p = 2q$.

On déduit de (2.25) et (2.23) qu'un élément (X_1, \dots, X_p) de $\mathfrak{m}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{m}_p$, est invariant à la fois par σ et σ' si et seulement si le système suivant est vérifié:

$$\begin{aligned} \sigma(X_1) &= X_2, \quad \sigma'(X_2) = X_3 \\ &\dots, \dots \\ \sigma(X_{2j-1}) &= X_{2j}, \quad \sigma'(X_{2j}) = X_{2j+1} \\ &\dots, \dots \\ \sigma(X_{2q-1}) &= X_{2q}, \quad \sigma'(X_{2q}) = X_1 \end{aligned}$$

Notons τ la restriction de $(\sigma'\sigma)^q$ à \mathfrak{m}_1 , qui est un automorphisme \mathbb{R} -linéaire de \mathfrak{m}_1 . Ce système possède une solution non nulle si et seulement si l'équation :

$$X_1 = \tau(X_1), \quad X_1 \in \mathfrak{m}_1$$

possède une solution non nulle. C'est le cas, d'après [G], Théorème 28. Ceci achève de prouver la Proposition dans le cas $k = 1$.

On suppose maintenant :

$$k = p-1 > 1 \quad (2.26)$$

Comme $(j_{p-1}, j_p, j_{p+1}) = (p-1, p, p-1)$, on déduit de (2.13), (2.14) et (2.8), que l'on a soit :

$$\theta(p) = p, \quad \theta'(p) = p-1 \quad (2.27)$$

soit :

$$\theta(p) = p-1, \quad \theta'(p) = p \quad (2.28)$$

Alors, d'après notre convention (2.15), on a $\theta(1) = 1$. Supposons (2.27) vérifié. Comme ci-dessus, ceci joint à (2.23) et (2.13), montre que p est pair et que , pour $j = 1, \dots, p-1$, on a :

$$\theta'(j) = j+1, \text{ si } j \text{ est impair (resp. } \theta(j) = j+1 \text{ si } j \text{ est pair)} \quad (2.29)$$

On note $p = 2q$. On déduit de (2.28) et (2.29) qu'un élément (X_1, \dots, X_p) de $\mathfrak{m}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{m}_p$, est invariant à la fois par σ et σ' si et seulement si le système suivant est vérifié :

$$\begin{aligned} \sigma(X_1) &= X_1, \quad \sigma'(X_1) = X_2 \\ &\dots, \dots \\ \sigma(X_{2j}) &= X_{2j+1}, \quad \sigma'(X_{2j+1}) = X_{2j+2} \\ &\dots, \dots \\ \sigma(X_{2q-2}) &= X_{2q-1}, \quad \sigma'(X_{2q-1}) = X_{2q} \\ \sigma(X_{2q}) &= X_{2q} \end{aligned}$$

Notant τ la restriction de $(\sigma'\sigma)^q$ à \mathfrak{m}_1 , qui est un automorphisme \mathbb{R} -linéaire de \mathfrak{m}_1 , ce système possède une solution non nulle si et seulement si le système :

$$X_1 = \sigma(X_1), \quad X_1 = (\tau^{-1}\sigma\tau)(X_1), \quad X_1 \in \mathfrak{m}_1 \quad (2.30)$$

possède une solution non nulle. La restriction de σ à \mathfrak{m}_1 et \mathfrak{m}_p est antilinéaire. Par ailleurs τ est soit \mathbb{C} -linéaire, soit antilinéaire, d'après le Lemme 6. Donc la restriction à \mathfrak{m}_1 de $\tau^{-1}\sigma\tau$ est antilinéaire. Il résulte alors du Lemme 12, que (2.30) à une solution non nulle. Ce qui achève la preuve de la Proposition dans le cas étudié. Le cas où (2.28) est satisfait se traite de manière similaire, mais alors p est impair.

Ceci achève notre discussion et la preuve de la Proposition. \square

Théorème 2 *Si \mathfrak{g} n'est pas commutative et si $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ est un triple de Manin de \mathfrak{g} , sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ est différent de \mathfrak{g} .*

Démonstration :

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un triple de Manin , $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$, sous $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$, et que \mathfrak{g} ne soit pas commutative. Alors $\mathfrak{h} := \mathfrak{i} \cap \mathfrak{g}^{der}$ (resp. $\mathfrak{h}' := \mathfrak{i}' \cap \mathfrak{g}^{der}$) est l'espace des points fixes d'une af-involutions σ (resp. σ') de \mathfrak{g}^{der} , d'après le Théorème 1. En appliquant la Proposition précédente, on aboutit à une contradiction avec l'hypothèse $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}' = \{0\}$, ce qui achève de prouver le Théorème . \square

Soit V un sous-espace \mathfrak{j}_0 invariant de \mathfrak{g} . On suppose qu'il est la somme de sous espaces poids de \mathfrak{g} pour \mathfrak{j}_0 , ce qui s'écrit aussi :

$$V = \sum_{\{\lambda \in \mathfrak{j}_0^* \mid V^\lambda \neq \{0\}\}} \mathfrak{g}^\lambda$$

Alors V admet un unique supplémentaire j_0 -invariant, V^\perp , qui est égal à la somme des sous-espaces poids de \mathfrak{g} qui ont une intersection nulle avec V , soit encore :

$$V^\perp = \sum_{\{\lambda \in j_0^* | \mathfrak{g}^\lambda \cap V = \{0\}\}} \mathfrak{g}^\lambda$$

On note p_V (resp. p^V , la projection de \mathfrak{g} sur V (resp. V^\perp) parallèlement à V^\perp (resp. V). Tout sous-espace j_0 -invariant est stable sous p^V et p_V .

Si de plus V est \mathfrak{l} -invariant, V^\perp est aussi \mathfrak{l} -invariant. En effet, comme \mathfrak{l} est réductive dans \mathfrak{g} , V admet un supplémentaire \mathfrak{l} -invariant qui n'est autre que V^\perp . On voit aussi que dans ce cas, V^\perp ne dépend pas du choix de la sous-algèbre de Cartan j_0 de \mathfrak{g} , contenue dans \mathfrak{l} . On a le même fait pour \mathfrak{l}' et $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$.

Théorème 3 *Soit B une forme de Manin sur \mathfrak{g} et $\mathfrak{i}, \mathfrak{i}'$ des sous-algèbres de Lie Lagrangiennes de \mathfrak{g} , avec \mathfrak{i} sous \mathfrak{p} et \mathfrak{i}' sous \mathfrak{p}' . On a, grâce au Théorème 1, $\mathfrak{i} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_a \oplus \mathfrak{n}$, où $\mathfrak{h} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{m}$, $\mathfrak{i}_a = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{a}$. On note $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{l}$. On fait de même pour \mathfrak{i}' .*

Les conditions (i) et (ii) suivantes sont équivalentes :

(i) $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ est un triple de Manin

(ii) Notant $\mathfrak{i}_1 = p^{n'}(\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}')$, $\mathfrak{i}'_1 = p^n(\tilde{\mathfrak{h}}' \cap \mathfrak{p})$, on a :

a) \mathfrak{i}_1 et \mathfrak{i}'_1 sont contenues dans $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$, et $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$ est un triple de Manin dans $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$, où B_1 désigne la restriction de B à $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$.

b) $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{h}'$ et $\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{h}$ sont réduits à zéro.

Si l'une de ces conditions est vérifiée, on appellera $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$ l'antécédent du triple de Manin $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$.

Démonstration :

Montrons que (i) implique (ii). Supposons que $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ soit un triple de Manin dans \mathfrak{g} . Pour des raisons de dimension, ceci équivaut à $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}' = \{0\}$. Ceci implique immédiatement la propriété b) de (ii).

Montrons ensuite que \mathfrak{i}_1 est une sous-algèbre de Lie réelle de $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$, et isotrope pour B_1 .

Etudiant les sous-espaces poids sous j_0 , on voit que :

$$\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}' = (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}') \oplus (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{n}') \quad (2.31)$$

Comme $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ est j_0 -invariant et que $p^{n'}(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{n}')$ est réduit à zéro, on a :

$$p^{n'}(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}') \subset \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$$

Il en résulte que \mathfrak{i}_1 est bien contenu dans $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$. Par ailleurs, la restriction de $p^{n'}$ à \mathfrak{p}' est la projection sur \mathfrak{l}' , parallèlement à \mathfrak{n}' . C'est donc un morphisme d'algèbres de Lie, ce qui implique que \mathfrak{i}_1 est une sous-algèbre de Lie réelle de $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$.

Soit $X, X_1 \in \mathfrak{i}_1$. Ce sont des éléments de $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$, et il existe N' et $N'_1 \in \mathfrak{n}'$ tels que Y et Y_1 soient éléments de \mathfrak{i} , où :

$$Y := X + N', \quad Y_1 := X_1 + N'_1$$

Par ailleurs \mathfrak{n}' et \mathfrak{p}' sont orthogonaux pour B (cf. la fin de la démonstration du Théorème 1). Un calcul immédiat montre alors que $B(Y, Y_1)$ est égal à $B_1(X, X_1)$. Comme $Y, Y_1 \in \mathfrak{i}$, $B(Y, Y_1)$ est nul. Finalement, \mathfrak{i}_1 est isotrope pour B_1 . On montre de même des propriétés similaires pour \mathfrak{i}'_1 .

Montrons $\mathfrak{i}_1 + \mathfrak{i}'_1 = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$. Soit $X \in \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$. Alors $X = I + I'$, avec $I \in \mathfrak{i}$, $I' \in \mathfrak{i}'$. Ecrivons $I = H + N$, $I' = H' + N'$ où $H \in \tilde{\mathfrak{h}}$, $H' \in \tilde{\mathfrak{h}}'$, $N \in \mathfrak{n}$, $N' \in \mathfrak{n}'$. On a donc :

$$X = H + N + H' + N' \quad (2.32)$$

ce qui implique : $H = X - H' - N' - N$. On voit ainsi que H est élément de $(\mathfrak{p}' + \mathfrak{n}) \cap \mathfrak{l}$. Décomposant sous l'action de \mathfrak{j}_0 , on voit que :

$$(\mathfrak{p}' + \mathfrak{n}) \cap \mathfrak{l} = \mathfrak{p}' \cap \mathfrak{l} \quad (2.33)$$

Finalement H est élément de $\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}'$. de même, on voit que H' est élément de $\tilde{\mathfrak{h}}' \cap \mathfrak{p}$. Par ailleurs, \mathfrak{n} et \mathfrak{n}' sont des sous-espaces \mathfrak{j}_0 -invariants et en somme directe avec $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$. Donc, appliquant $p_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'}$ à (2.32), on a :

$$X = p_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'}(H) + p_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'}(H')$$

De (2.31), on déduit que la restriction de $p_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'}$ à $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}'$ est égale à la restriction de $p^{\mathfrak{n}'}$ à $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}'$. Donc, on a :

$$p_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'}(H) = p^{\mathfrak{n}'}(H) \in \mathfrak{i}_1$$

on obtient de même :

$$p_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'}(H) \in \mathfrak{i}'_1$$

et l'on conclut que :

$$X \in \mathfrak{i}_1 + \mathfrak{i}'_1$$

Ceci achève de prouver que :

$$\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}' = \mathfrak{i}_1 + \mathfrak{i}'_1 \quad (2.34)$$

Par ailleurs :

$\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ est le centralisateur d'un élément semi-simple de \mathfrak{g} , dont

l' image par la représentation adjointe n' a que des valeurs propres

réelles (2.35)

En effet $(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}') \oplus ((\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{l}) \oplus \mathfrak{n})$ est une décomposition de Langlands d'une sous-algèbre parabolique de \mathfrak{g} .

Alors la restriction B_1 de B à $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ est une forme de Manin (cf. Corollaire du Lemme 2), et $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1$, qui sont isotropes pour B_1 , sont de dimension réelles inférieures ou égales à la dimension complexe de $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$. La somme dans (2.34) est nécessairement directe, ce qui achève de prouver que (i) implique (ii). Montrons que (ii) implique (i). Supposons satisfaites les conditions a) et b)

de (i). Montrons que $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}'$ est réduit à zéro. Soit X un élément de $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}'$. Alors :

$$X = H + N = H' + N', \text{ où } H \in \tilde{\mathfrak{h}}, H' \in \tilde{\mathfrak{h}}', N \in \mathfrak{n}, N' \in \mathfrak{n}' \quad (2.36)$$

On a alors :

$$H = H' + N' - N \in \mathfrak{l} \cap (\mathfrak{p}' + \mathfrak{n})$$

(2.33) implique que $H \in \mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}'$. De même, on montre que $H' \in \mathfrak{l}' \cap \mathfrak{p}$. Appliquant $p_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'}$ à (2.36), on voit que :

$$p_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'}(X) = p_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'}(H) = p_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'}(H')$$

et, grâce à la première partie de la démonstration, cela conduit à :

$$p_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'}(X) = p^{\mathfrak{n}'}(H) = p^{\mathfrak{n}}(H') \in \mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{i}'_1$$

Donc on a :

$$p^{\mathfrak{n}'}(H) = p^{\mathfrak{n}}(H') = 0$$

Mais $p^{\mathfrak{n}'}$ est injective sur $\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}'$, car $\mathfrak{n}' \cap \tilde{\mathfrak{h}}$ est réduit à zéro. En effet $\mathfrak{n}' \cap \tilde{\mathfrak{h}}$ est contenu dans $\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{l}$. On voit que cette dernière intersection est égal à $\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{m}$. Donc $\mathfrak{n}' \cap \tilde{\mathfrak{h}}$ est égal à $\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{h}$, qui est réduit à zéro, d'après b). Donc H est nul et il en va de même de H' . Alors X est un élément de $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{n}'$, qui est réduit à zéro, d'après nos hypothèses sur $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$. Donc X est nul et $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}'$ est réduit à zéro. Alors la somme $\mathfrak{i} + \mathfrak{i}'$ est directe, et l'on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{i}'$ pour des raisons de dimension. Ceci achève de prouver le Théorème. \square

Proposition 4 Si $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ est un triple de Manin sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, d'antécédent $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$, et si $g = nn'x \in P \cap P'$, où $x \in L \cap L'$, $n \in N_L$, $n' \in N'_L$, l'antécédent de $(B, \text{Ad } g(\mathfrak{i}), \text{Ad } g(\mathfrak{i}'))$ est égal à $(B_1, \text{Ad } x(\mathfrak{i}_1), \text{Ad } x(\mathfrak{i}'_1))$.

Démonstration :

Ecrivons $\underline{\mathfrak{i}} = \text{Ad } g(\mathfrak{i})$ et $\underline{\mathfrak{h}} = \underline{\mathfrak{i}} \cap \mathfrak{l}$, etc.. On note $(B_1, \underline{\mathfrak{i}}_1, \underline{\mathfrak{i}}'_1)$, l'antécédent de $(B, \text{Ad } g(\mathfrak{i}), \text{Ad } g(\mathfrak{i}'))$. On a, grâce à la Proposition 2, :

$$g = n'nx = n'x(x^{-1}nx)$$

Donc :

$$\text{Ad } g(\mathfrak{i}) = \text{Ad } n'x(\mathfrak{i})$$

puisque $x^{-1}nx \in N \subset I$. Comme $n'x \in (L \cap L')N'_L \subset L$, cela implique :

$$\underline{\mathfrak{h}} = \text{Ad } n'x(\tilde{\mathfrak{h}}),$$

où $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{l}$. Mais $n'x$ est aussi élément de P' . Alors, on a :

$$\underline{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}' = \text{Ad } n'x(\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}')$$

D'où l'on déduit :

$$\mathbf{i}_1 = p^{n'}(Ad\ n'x(\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}'))$$

Mais il est clair que la restriction de $p^{n'}$ à \mathfrak{p}' , n'est autre que la projection sur \mathfrak{l}' , parallèlement à \mathfrak{n}' . Cette restriction entrelace l'action adjointe de P' sur \mathfrak{p}' avec l'action naturelle de P' sur \mathfrak{l}' , identifié au quotient de \mathfrak{p}' par \mathfrak{n}' (N' agit trivialement). Il en résulte :

$$\mathbf{i}_1 = Ad\ x(p^{n'}(\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}')) = Ad\ x(\mathbf{i}_1)$$

comme désiré. On traite de manière similaire \mathbf{i}'_1 . □

3 Triples de Manin pour une algèbre de Lie réductive complexe : Relèvement

Théorème 4 (i) *Tout triple de Manin sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ est conjugué, par un élément de $P \cap P'$ à un triple de Manin, $(B, \mathbf{i}, \mathbf{i}')$, sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, d'antécédent $(B_1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}'_1)$, satisfaisant les propriétés suivantes :*

On note σ (resp. σ'), l'af-involution de \mathfrak{m} (resp. \mathfrak{m}') ayant \mathfrak{h} (resp. \mathfrak{h}') pour espace de points fixes. Il existe une sous-algèbre de Cartan fondamentale $\tilde{\mathfrak{f}}$ (resp. $\tilde{\mathfrak{f}}'$), de \mathbf{i} (resp. \mathbf{i}'), contenue dans \mathbf{i}_1 (resp. \mathbf{i}'_1) telle que la paire $(\tilde{\mathfrak{f}}, \sigma)$ vérifie les conditions 1) à 6) qui suivent (la paire $(\tilde{\mathfrak{f}}', \sigma')$ vérifiant des conditions similaires, numérotées 1') à 6'), avec les changements évidents) :

1) *L'application σ est une af-involution de l'algèbre de Lie \mathfrak{m} , avec ensemble de points fixes \mathfrak{h} et $\tilde{\mathfrak{f}}$ est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de \mathbf{i}_1 telle que $\tilde{\mathfrak{f}} = \mathfrak{f} \oplus (\tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{a})$, où $\mathfrak{f} = \tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{h}$. De plus $\tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{a}$ est isotrope pour B , de dimension réelle égale à la dimension complexe de \mathfrak{a} , et \mathfrak{h} est isotrope pour B . On note \mathfrak{j} le centralisateur dans \mathfrak{g} de $\tilde{\mathfrak{f}}$, qui est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , contenue dans $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$, d'après le Lemme 11.*

2) *L'intersection de \mathfrak{h} avec \mathfrak{n}' est réduite à zéro.*

3) *Il existe une sous-algèbre de Borel, \mathfrak{b} , de \mathfrak{m} , contenant $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{m}$, et contenue dans $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{p}'$, tel que $\sigma(\mathfrak{b}) + \mathfrak{b} = \mathfrak{m}$.*

4) *Il existe une unique décomposition de Langlands de \mathfrak{p}_1 , où \mathbf{i}_1 est sous \mathfrak{p}_1 , $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{n}_1$, telle que \mathfrak{l}_1 contienne $\tilde{\mathfrak{f}}$. De plus $\underline{\mathfrak{m}}_1 = \mathfrak{l}_1^{der}$ est égal à l'idéal dérivé de $(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{l}') \cap \sigma(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{l}')$.*

5) *Si $\alpha \in \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{j})$, on peut définir $\underline{\alpha} \in \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{j})$ par la condition : $\sigma(\mathfrak{m}^\alpha) = \mathfrak{m}^\alpha$.*

On a : $\mathfrak{n}_1 = \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n}', \mathfrak{j}) \cap \Delta(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{l}', \mathfrak{j})} \mathfrak{m}^\alpha$.

6) *La restriction de σ à $\underline{\mathfrak{m}}_1$ est égale à l'af-involution dont l'espace des points fixes est égal à $\underline{\mathfrak{h}}_1 := \mathbf{i}_1 \cap \underline{\mathfrak{m}}_1$.*

On dit alors que le triple de Manin $(B, \mathbf{i}, \mathbf{i}')$ est lié à $(B_1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}'_1)$, avec lien $(\tilde{\mathfrak{f}}, \tilde{\mathfrak{f}}')$.

(ii) *Réciproquement si B est une forme de Manin sur \mathfrak{g} , si B_1 est sa restriction à $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$, si $(B_1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}'_1)$ est un triple de Manin pour $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ et si $(\sigma, \tilde{\mathfrak{f}})$ (resp. $(\sigma', \tilde{\mathfrak{f}}')$) vérifient les propriétés 1) à 6) (resp. 1') à 6')), posant $\mathbf{i} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$, où*

$\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus (\tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{a})$, (resp. $\mathfrak{i}' = \tilde{\mathfrak{h}}' \oplus \mathfrak{n}'$, où $\tilde{\mathfrak{h}}' = \mathfrak{h}' \oplus (\tilde{\mathfrak{f}}' \cap \mathfrak{a}')$), alors $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ est un triple de Manin sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, lié à $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$, avec lien $(\tilde{\mathfrak{f}}, \tilde{\mathfrak{f}}')$.

Remarque 2 Dans le Théorème, la condition 3) implique la condition 2). En effet si 3) est satisfait, pour des raisons de dimension, $\mathfrak{b} \cap \sigma(\mathfrak{b})$, qui contient une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{m} (voir (2.1)), est réduit à $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{m}$. Par ailleurs, comme \mathfrak{b} est contenu dans $\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{l}$, $\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{l}$ est contenu dans le radical nilpotent de \mathfrak{b} . Par suite, on a :

$$(\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{l}) \cap \sigma(\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{l}) \subset (\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{l}) \cap \mathfrak{j} = \{0\}$$

Donc, $\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}$ est réduit à zéro. Comme \mathfrak{h} est contenu dans \mathfrak{l} , $\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{l}$ est également réduit à zéro, comme désiré.

Démonstration :

Démontrons (i). Soit $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ un triple de Manin pour \mathfrak{g} , sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$. On note $\underline{\mathfrak{h}} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{m}$, etc. Comme $\mathfrak{i} + \mathfrak{i}' = \mathfrak{g}$, on a :

$$\mathfrak{i} + \mathfrak{p}' = \mathfrak{g}$$

Appliquant p_l à cette égalité, on en déduit :

$$(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{l}) + (\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{l}) = \mathfrak{l}$$

On applique encore la projection de \mathfrak{l} sur \mathfrak{m} , parallèlement à \mathfrak{a} pour obtenir :

$$\underline{\mathfrak{h}} + (\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$$

En conséquence, $\underline{H}(P' \cap M)^0$ est ouvert dans M . Or $(P' \cap M)^0$ est le sous groupe parabolique de M , d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{m}$. Par ailleurs σ étant une af-involution, \mathfrak{m} est le produit d'idéaux \mathfrak{m}_j , invariants par σ et sur lesquels induit :

soit une conjugaison par rapport à une forme réelle,

soit "l' échange des facteurs " de deux idéaux isomorphes dont \mathfrak{m}_j est la somme.

Il résulte alors de [M2], [M1], que $\underline{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}'$ contient une sous-algèbre de Cartan fondamentale $\underline{\mathfrak{f}}$ de $\underline{\mathfrak{h}}$ et une sous-algèbre de Borel de \mathfrak{m} , contenant $\underline{\mathfrak{f}}$, contenue dans $\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{m}$, et telle que :

$$\sigma(\underline{\mathfrak{b}}) + \underline{\mathfrak{b}} = \mathfrak{m} \tag{3.1}$$

D'après le Lemme 11, le centralisateur $\underline{\mathfrak{j}}$ de $\tilde{\mathfrak{f}} := \underline{\mathfrak{f}} + \underline{\mathfrak{i}}_{\mathfrak{a}}$ dans \mathfrak{g} est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , contenue dans \mathfrak{l} . De la définition des af-involutions, il résulte que toute sous-algèbre de Cartan de $\underline{\mathfrak{h}}$ contient des éléments réguliers de \mathfrak{m} . Il résulte alors de [Bor], Proposition 11.15, que $\underline{\mathfrak{j}} \cap \mathfrak{m}$ est contenu dans \mathfrak{b} . Donc $\underline{\mathfrak{j}} = (\underline{\mathfrak{j}} \cap \mathfrak{m}) \oplus \mathfrak{a}$ est contenu dans $\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{l}$. C'est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{l}$, donc elle est conjuguée à \mathfrak{j}_0 , par un élément du sous-groupe analytique de G , d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{l}$. Mais, d'après (2.31), on a :

$\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{l} = (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}') \oplus (\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{l})$ et ce sous-groupe analytique est égal à $(L \cap L')N'_L$, puisque $L \cap L'$ est connexe, d'après la Proposition 2.

Donc, il existe $n' \in N'_L$, $x \in L \cap L'$, tels que

$$Ad xn'(\mathfrak{j}) = \mathfrak{j}_0$$

soit encore :

$$Ad n'(\mathfrak{i}) = Ad x^{-1}(\mathfrak{j}_0) \subset \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}' \quad (3.2)$$

On trouve de même $\tilde{\mathfrak{f}}'$, \mathfrak{b}' , \mathfrak{i}' et $x' \in L \cap L'$, $n \in N_{L'}$, vérifiant des propriétés similaires. On pose :

$$u = nn', \quad \mathfrak{i} = Ad u(\mathfrak{i}), \quad \mathfrak{i}' = Ad u(\mathfrak{i}')$$

Comme n et n' commutent et que \mathfrak{n} est un idéal de \mathfrak{i} , on a :

$$Ad u(\mathfrak{i}) = Ad n'(\mathfrak{i})$$

et de même :

$$Ad u(\mathfrak{i}') = Ad n(\mathfrak{i}')$$

On pose alors :

$$\tilde{\mathfrak{f}} = Ad n'(\tilde{\mathfrak{f}}), \quad \tilde{\mathfrak{f}}' = Ad n(\tilde{\mathfrak{f}}'), \quad \mathfrak{b} = Ad n'(\mathfrak{b}), \quad \mathfrak{b}' = Ad n(\mathfrak{b}') \quad (3.3)$$

On voit alors que $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ est un triple de Manin, conjugué par u à $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ et sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$.

On va voir que $\tilde{\mathfrak{f}}$ a les propriétés voulues. D'abord, $\tilde{\mathfrak{f}}$ est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de \mathfrak{i} , d'après le Lemme 11. Par conjugaison, on en déduit que $\tilde{\mathfrak{f}}$ est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de \mathfrak{i} . Le centralisateur, \mathfrak{j} , de $\tilde{\mathfrak{f}}$ vérifie

$$\mathfrak{j} = Ad n'(\mathfrak{j}) \quad (3.4)$$

donc est contenu dans $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$, d'après (3.2). Alors, d'après le Lemme 11, on a bien $\tilde{\mathfrak{f}} = \mathfrak{f} \oplus (\tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{a})$, où $\mathfrak{f} = \tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{h}$, et $\tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{a}$ est égal à \mathfrak{i}_a , donc isotrope pour B et de la dimension voulue, d'après le Théorème 1. De même \mathfrak{h} est isotrope pour B .

On a vu que $\tilde{\mathfrak{f}}$ est contenu dans $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$, donc dans $\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}'$. De plus $p^{n'}$ est l'identité sur \mathfrak{l}' . Donc $\tilde{\mathfrak{f}}$ est contenu dans \mathfrak{i}_1 . Par ailleurs, comme $\tilde{\mathfrak{f}}$ est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{i} , contenue dans $\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}'$, c'est une sous-algèbre de Cartan de $\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}'$ (cf. [Bou], Ch. VII, Paragraphe 2.1, Exemple 3), et par projection, c'est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{i}_1 (cf. l.c., Corollaire 2 de la Proposition 4).

Il reste à voir, pour achever de vérifier 1), que cette sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{i}_1 est fondamentale.

D'après le Lemme 11 (iv), il existe une unique décomposition de Langlands $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{n}_1$, telle que \mathfrak{l}_1 contienne $\tilde{\mathfrak{f}}$. On note $\underline{\mathfrak{m}}_1 = \mathfrak{l}_1^{der}$. Il suffit de voir que $\tilde{\mathfrak{f}} \cap \underline{\mathfrak{m}}_1$ est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de \mathfrak{h}_1 . Pour cela, il suffit de voir qu'aucune racine de $\tilde{\mathfrak{f}} \cap \underline{\mathfrak{m}}_1$ dans $\underline{\mathfrak{m}}_1$ n'est réelle. D'après le Lemme

11 (iv), $\tilde{\mathfrak{f}} = (\tilde{\mathfrak{f}} \cap \underline{\mathfrak{m}}_1) \oplus (\tilde{\mathfrak{f}} \cap \underline{\mathfrak{a}}_1)$, où $\underline{\mathfrak{a}}_1$ est le centre de $\underline{\mathfrak{l}}_1$. Alors, une racine α de $\tilde{\mathfrak{f}} \cap \underline{\mathfrak{m}}_1$ dans $\underline{\mathfrak{m}}_1$, prolongée par zéro sur $\tilde{\mathfrak{f}} \cap \underline{\mathfrak{a}}_1$ est une racine de $\tilde{\mathfrak{f}}$ dans \mathfrak{m} . Mais alors, comme \mathfrak{f} est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de \mathfrak{h} , α n'est pas réelle sur \mathfrak{f} . Ceci prouve que $\tilde{\mathfrak{f}}$ est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de \mathfrak{i}_1 .

2) résulte du fait que l'intersection de \mathfrak{i} et \mathfrak{i}' est réduite à zéro, car \mathfrak{i}' contient \mathfrak{n}' .

L'équation (3.1) assure, par transport de structure que 3) est satisfait. Comme $\tilde{\mathfrak{f}}$ est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{i}_1 , l'existence de $\underline{\mathfrak{l}}_1$ contenant $\tilde{\mathfrak{f}}$, résulte du Lemme 11 (iv).

Décrivons plus précisément \mathfrak{i}_1 . Pour cela commençons par décrire l'action de \mathfrak{f} sur $\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}'$. Soit $\alpha \in \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{j})$. Comme les éléments de \mathfrak{f} sont fixés par σ , $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{m}$, qui est le centralisateur de \mathfrak{f} dans \mathfrak{m} , est σ -invariant. Il résulte du Corollaire du Lemme 6, que \mathfrak{m}^α est alors contenu dans un idéal de \mathfrak{m} , stable sur lequel σ est soit linéaire soit antilinéaire. Donc, σ est soit linéaire soit antilinéaire sur \mathfrak{m}^α . Comme, pour $X \in \mathfrak{m}^\alpha$ et $H \in \mathfrak{j}$, on a :

$$[H, \sigma(X)] = [\sigma\sigma(H), \sigma(X)] = \sigma([\sigma(H), X]) = \sigma(\alpha(\sigma(H))X), \quad (3.5)$$

et on peut définir $\underline{\alpha} \in \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{j})$ par : l'égalité

$$\sigma(\mathfrak{m}^\alpha) = \mathfrak{m}^{\underline{\alpha}} \quad (3.6)$$

Par ailleurs \mathfrak{b} et $\sigma(\mathfrak{b})$ sont des sous-algèbres de Borel opposées relativement à $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{m}$, car 3) a été vérifié. On déduit de ce qui précède :

$$\alpha \neq \underline{\alpha}, \quad \alpha \in \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{f}) \quad (3.7)$$

On note :

$$\mathfrak{h}_\alpha := (\mathfrak{m}^\alpha + \mathfrak{m}^{\underline{\alpha}})^\sigma, \quad \alpha \in \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{f}) \quad (3.8)$$

On a :

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{f} \oplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{b}, \mathfrak{j})} \mathfrak{h}_\alpha \quad (3.9)$$

On vérifie aisément que \mathfrak{h}_α est invariant sous \mathfrak{f} . Montrons :

$$\mathfrak{h}_\alpha \text{ est irréductible sous } \mathfrak{f} \quad (3.10)$$

Comme α est différent de $\underline{\alpha}$, \mathfrak{h}_α , qui est égal à $\{X + \sigma(X) | X \in \mathfrak{m}^\alpha\}$, est de dimension deux sur \mathbb{R} . S'il a un sous-module irréductible non nul, $\mathbb{R}X$, X doit se transformer sous \mathfrak{f} par un caractère réel de \mathfrak{f} . Celui-ci doit être égal à la restriction de α ou $\underline{\alpha}$ à \mathfrak{f} . Alors (3.10) va résulter de la démonstration de :

$$\text{Pour tout } \alpha \in \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{j}), \quad \alpha \text{ restreint à } \mathfrak{f} \text{ n'est pas réelle} \quad (3.11)$$

Distinguons deux cas.

a) \mathfrak{m}^α est contenu dans un idéal \mathfrak{m}_0 , stable par σ , sur lequel σ est antilinéaire. Pour démontrer (3.11), on se réduit au cas où $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0$, i.e. on peut supposer σ antilinéaire. (3.5) montre que la restriction de $\underline{\alpha}$ à \mathfrak{f} est égale à la conjugaison

complexe de la restriction de α à \mathfrak{f} , donc α est réelle sur \mathfrak{f} si et seulement si ces deux restrictions sont égales. Mais \mathfrak{h} étant, dans notre cas, une forme réelle de \mathfrak{m} , \mathfrak{f} est une forme réelle de \mathfrak{j} . Si les deux restrictions à \mathfrak{f} étaient égales, on aurait alors $\alpha = \underline{\alpha}$, ce qui n'est pas. (3.11) en résulte dans ce cas. b) \mathfrak{m}^α est contenu dans un idéal de \mathfrak{m} , produit de deux idéaux simples, \mathfrak{m}' , \mathfrak{m}'' , et σ restreint à $\mathfrak{m}' \times \mathfrak{m}''$ est \mathbb{C} linéaire et de la forme :

$$(X', X'') \mapsto (\tau^{-1}(X''), \tau(X')), \quad (X', X'') \in \mathfrak{m}' \times \mathfrak{m}''$$

où τ est un isomorphisme \mathbb{C} -linéaire entre les algèbres de Lie \mathfrak{m}' et \mathfrak{m}'' . Ici aussi, on se réduit à prouver l'assertion lorsque $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \times \mathfrak{m}''$. L'étude des points fixes de σ , montre aisément que, dans ce cas, \mathfrak{f} est un sous-espace vectoriel complexe de \mathfrak{j} , sur lequel la restriction de α est non nulle, et automatiquement \mathbb{C} -linéaire, donc n'est pas réelle. Ce qui achève de prouver (3.11).

En décomposant l'action de j_0 sur $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}'$, on trouve : $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}' = (\mathfrak{m} \cap \mathfrak{p}') \oplus \mathfrak{a}$, puis, tenant compte de la définition de $\tilde{\mathfrak{h}}$: $\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}' = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}') \oplus \mathfrak{i}_a$. Décomposant $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}'$ en représentations irréductibles sous \mathfrak{f} , on voit que :

$$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}' = \mathfrak{f} \oplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{b}, \mathfrak{j}), \mathfrak{h}_\alpha \subset \mathfrak{p}'} \mathfrak{h}_\alpha$$

Il est clair que \mathfrak{h}_α est contenu dans \mathfrak{p}' si et seulement si c'est le cas de \mathfrak{m}^α et de \mathfrak{m}^α . Mais on a :

$$\mathfrak{m} \cap \mathfrak{p}' = (\mathfrak{m} \cap \mathfrak{l}') \oplus (\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n}')$$

De plus comme \mathfrak{b} est contenu dans \mathfrak{p}' , $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n}'$ est contenu dans \mathfrak{b} , c'est à dire :

$$\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n}' = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{n}' \quad (3.12)$$

En particulier, si $\alpha \in \Delta(\mathfrak{b}, \mathfrak{j})$, $\underline{\alpha}$ n'est pas élément de $\Delta(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n}', \mathfrak{j})$. Par suite :

$$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}' = \mathfrak{f} \oplus (\oplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{l}', \mathfrak{j}) \cap \underline{\Delta(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{l}', \mathfrak{j})}} \mathfrak{h}_\alpha) \oplus (\oplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{n}', \mathfrak{j}) \cap \underline{\Delta(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{l}', \mathfrak{j})}} \mathfrak{h}_\alpha)$$

Etudions l'image, \mathfrak{i}_1 , de $\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}'$ par $p^{n'}$. Si $\alpha \in \Delta(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{l}', \mathfrak{j}) \cap \underline{\Delta(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{l}', \mathfrak{j})}$, \mathfrak{h}_α est contenu dans $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{l}'$, et $p^{n'}(\mathfrak{h}_\alpha)$ est égal à \mathfrak{h}_α . Si $\alpha \in \Delta(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{n}', \mathfrak{j}) \cap \underline{\Delta(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{l}', \mathfrak{j})}$, \mathfrak{m}^α est contenu dans \mathfrak{n}' et \mathfrak{m}^α est contenu dans \mathfrak{l}' . Comme $\mathfrak{h}_\alpha = \{\overline{X + \sigma(X)} | X \in \mathfrak{m}^\alpha\}$, $p^{n'}(\mathfrak{h}_\alpha)$ est égal à \mathfrak{m}^α . Enfin $p^{n'}$ est l'identité sur $\tilde{\mathfrak{f}} = \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{i}_a$.

Finalement :

$$p^{n'}(\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}') = \mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{v}_1 \oplus \mathfrak{i}_a \quad (3.13)$$

où :

$$\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{f} \oplus (\oplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{l}', \mathfrak{j}) \cap \underline{\Delta(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{l}', \mathfrak{j})}} \mathfrak{h}_\alpha) \quad (3.14)$$

et

$$\mathfrak{v}_1 = \oplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{n}', \mathfrak{j}) \cap \underline{\Delta(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{l}', \mathfrak{j})}} \mathfrak{m}^\alpha \quad (3.15)$$

On remarque que :

$$\mathfrak{u}_1 = ((\mathfrak{m} \cap \mathfrak{l}') \cap \sigma(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{l}'))^\sigma \quad (3.16)$$

Donc \mathfrak{u}_1 est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{m} \cap \ell'$, réductive. On note \mathfrak{z}_1 son centre. Alors :

$$\mathfrak{r}_1 := \mathfrak{z}_1 \oplus \mathfrak{v}_1 \oplus \mathfrak{i}_a$$

est un idéal résoluble de $\mathfrak{i}_1 = p^{n'}(\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}')$, admettant la sous algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{u}_1^{der} comme supplémentaire dans \mathfrak{i}_1 . Donc \mathfrak{r}_1 est le radical de \mathfrak{u}_1 . Etudiant l'idéal dérivé, \mathfrak{i}_1^{der} de \mathfrak{i}_1 , on a :

$$\mathfrak{i}_1^{der} \subset \mathfrak{u}_1^{der} \oplus \mathfrak{v}_1$$

Par ailleurs \mathfrak{u}_1^{der} est contenu dans \mathfrak{i}_1^{der} , de même que \mathfrak{v}_1 , car $[\mathfrak{f}, \mathfrak{v}_1] = \mathfrak{v}_1$, d'après (3.11). Finalement, on obtient :

$$\mathfrak{i}_1^{der} = \mathfrak{u}_1^{der} \oplus \mathfrak{v}_1, \quad \mathfrak{r}_1 \cap \mathfrak{i}_1^{der} = \mathfrak{v}_1$$

Donc \mathfrak{v}_1 est égal au radical nilpotent de \mathfrak{i}_1 (cf. [Bou], Ch. I, Paragraphe 6.4, Proposition 6), i.e. :

$$\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{n}_1 \tag{3.17}$$

La propriété 5) est prouvée.

Prouvons 4). On a vu que le centralisateur \mathfrak{j} de $\tilde{\mathfrak{f}}$ est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{l} , égale à $(\mathfrak{j} \cap \mathfrak{m}) + \mathfrak{a}$. Par ailleurs, comme $\tilde{\mathfrak{f}}$ est contenue dans \mathfrak{i}_1 , donc dans ℓ' , ce centralisateur contient \mathfrak{a}' , puis est contenu dans ℓ' . Donc, \mathfrak{j} est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{l} \cap \ell'$. On pose :

$$\tilde{\mathfrak{l}}_1 := ((\mathfrak{m} \cap \ell') \cap \sigma(\mathfrak{m} \cap \ell')) \oplus \mathfrak{a} \tag{3.18}$$

qui contient \mathfrak{j} . On pose $\underline{\mathfrak{p}}_1 := \tilde{\mathfrak{l}}_1 \oplus \mathfrak{v}_1$, qui contient la sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{l} \cap \ell'$, $\ell' \cap (\sigma(\mathfrak{b}) \oplus \mathfrak{a})$.

On va voir que $\underline{\mathfrak{p}}_1$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{l} \cap \ell'$. L'équation (3.12) jointe à la définition de \mathfrak{u}_1 et \mathfrak{v}_1 (cf (3.14), (3.15) et (3.16)), permet de voir que le crochet de \mathfrak{u}_1 et \mathfrak{v}_1 est contenu dans \mathfrak{v}_1 . Ceci implique que $\underline{\mathfrak{p}}_1$ est une sous algèbre de Lie de $\mathfrak{l} \cap \ell'$. C'est une sous-algèbre parabolique, car elle contient une sous-algèbre de Borel.

L'analyse des poids sous \mathfrak{j} montre que $\tilde{\mathfrak{l}}_1 \oplus \mathfrak{v}_1$ est une décomposition de Langlands de la sous-algèbre parabolique, $\underline{\mathfrak{p}}_1$, de $\mathfrak{l} \cap \ell'$. En particulier $\underline{\mathfrak{p}}_1$ admet \mathfrak{v}_1 comme radical nilpotent. Donc $\mathfrak{p}_1 = \underline{\mathfrak{p}}_1$, d'après (3.17) et (1.17), et $\tilde{\mathfrak{l}}_1 \oplus \mathfrak{n}_1$ est une décomposition de Langlands de \mathfrak{p}_1 , telle que $\tilde{\mathfrak{l}}_1$ contienne $\tilde{\mathfrak{f}}$. C'est la seule, d'après le Lemme 11 (iv), appliqué à \mathfrak{i}_1 . Donc $\tilde{\mathfrak{l}}_1 = \mathfrak{l}_1$

De plus, comme \mathfrak{a} est central dans \mathfrak{l} , il résulte (3.18) que $\underline{\mathfrak{m}}_1$ est l'idéal dérivé de $(\mathfrak{m} \cap \ell') \cap (\sigma(\mathfrak{m} \cap \ell'))$. D'après le Théorème 1, on sait que $\underline{\mathfrak{h}}_1 := \mathfrak{i}_1 \cap \underline{\mathfrak{m}}_1$ est l'espace des points fixes d'une af-involution de $\underline{\mathfrak{m}}_1$ que l'on note $\underline{\sigma}_1$. $\underline{\mathfrak{m}}_1$.

En outre, on a $\underline{\mathfrak{h}}_1 = (\mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{l}_1)^{der}$, d'où l'on déduit :

$$\underline{\mathfrak{h}}_1 = \mathfrak{u}_1^{der} \tag{3.19}$$

On sait, d'après (3.16), que \mathfrak{u}_1 est l'espace des points fixes de la restriction de σ à $\underline{\mathfrak{m}}_1$, dont l'idéal dérivé est égal à $\underline{\mathfrak{m}}_1$. Comme $\underline{\mathfrak{m}}_1$ est réductive, passant

à l'idéal dérivé, on voit que $\underline{\mathfrak{h}}_1 = \mathfrak{u}_1^{der}$ est égal à l'idéal dérivé de l'ensemble $\underline{\mathfrak{h}}_1'$ des points fixes de la restriction $\underline{\sigma}_1'$, de σ à $\underline{\mathfrak{m}}_1$. Montrons que $\underline{\mathfrak{h}}_1' = \underline{\mathfrak{h}}_1$. Notons \mathfrak{q}_1 (resp. \mathfrak{q}_1'), l'orthogonal de $\underline{\mathfrak{h}}_1$ (resp. $\underline{\mathfrak{h}}_1'$) pour la forme de Killing de l'algèbre de Lie $\underline{\mathfrak{m}}_1$, regardée comme algèbre de Lie réelle. Alors, on a :

$$\underline{\mathfrak{m}}_1 = \underline{\mathfrak{h}}_1 \oplus \mathfrak{q}_1 = \underline{\mathfrak{h}}_1' \oplus \mathfrak{q}_1'$$

D'où l'on déduit :

$$\underline{\mathfrak{m}}_1^{der} = \underline{\mathfrak{h}}_1'^{der} + [\mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_1'] + [\underline{\mathfrak{h}}_1', \mathfrak{q}_1']$$

Mais \mathfrak{q}_1' est contenu dans \mathfrak{q}_1 et $[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_1]$ est contenu dans $\underline{\mathfrak{h}}_1$. D'autre part $[\underline{\mathfrak{h}}_1', \mathfrak{q}_1']$ est contenu dans \mathfrak{q}_1' . Finalement, tenant compte du fait que $\underline{\mathfrak{m}}_1$ est semi-simple, on a :

$$\underline{\mathfrak{m}}_1 \subset \underline{\mathfrak{h}}_1 + \mathfrak{q}_1'$$

D'où l'on déduit l'égalité de $\underline{\mathfrak{h}}_1$ et $\underline{\mathfrak{h}}_1'$, et par suite celle de $\underline{\sigma}_1$ et $\underline{\sigma}_1'$. Ceci achève de prouver 5) et 6).

On vient d'achever la preuve de (i).

Passons à la preuve de (ii), dont on retient les hypothèses. D'abord \mathfrak{i} et \mathfrak{i}' sont des sous-algèbres de Lie réelles, isotropes, de \mathfrak{g} , dont la dimension réelle est égale à la dimension complexe de \mathfrak{g} , d'après la condition 1) et le Théorème 1. On va appliquer le Théorème 3 pour voir que $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ est un triple de Manin.

Une analyse de l'action de \mathfrak{f} , similaire à celle qui a été faite au cours de la preuve de (i) conduit à l'analogue des équations (3.13) à (3.16). L'analogue de l'équation (3.16) et la condition 6) montrent que \mathfrak{u}_1^{der} contient $\underline{\mathfrak{h}}_1 := \underline{\mathfrak{m}}_1 \cap \mathfrak{i}_1$.

Par ailleurs $\tilde{\mathfrak{f}}$ est contenu dans $p^{n'}(\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}')$, car $\tilde{\mathfrak{f}} \subset \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}' \cap \tilde{\mathfrak{h}}$, d'après 1).

D'autre part, d'après 5) : $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{n}_1$.

Finalement $p^{n'}(\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}')$ contient \mathfrak{i}_1 . Par ailleurs, comme \mathfrak{i} est isotrope pour B , le raisonnement du début du Théorème 2, montre que $p^{n'}(\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}')$ est isotrope pour B_1 . Donc, pour des raisons de dimension, on a :

$$p^{n'}(\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}') = \mathfrak{i}_1$$

De même, on voit que :

$$p^n(\tilde{\mathfrak{h}}' \cap \mathfrak{p}) = \mathfrak{i}_1'$$

Tenant compte de 3), le Théorème 3 montre que $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ est un triple de Manin pour \mathfrak{g} , d'antécédent $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_1')$.

Montrons que $\tilde{\mathfrak{f}}$ est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de \mathfrak{i} . D'après (3.11), aucune racine de \mathfrak{f} dans \mathfrak{m} n'est réelle, donc \mathfrak{f} est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de \mathfrak{h} . Alors $\tilde{\mathfrak{f}}$ est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de \mathfrak{i} , d'après le Lemme . On a le même résultat pour $\tilde{\mathfrak{f}}'$. Ceci achève de prouver le Théorème. \square

Proposition 5 (i) *Tout triple de Manin sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ est conjugué, par un élément de G , à un triple de Manin, $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$, sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, pour lequel il existe :*

1) *Une suite finie strictement décroissante de sous-algèbres de Lie réductives complexes de \mathfrak{g} , $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}', \dots, \mathfrak{g}_k, \dots$, contenant \mathfrak{j}_0 , se terminant à $\mathfrak{g}_{p_0} = \mathfrak{j}_0$.*

2) *Une suite de couples de sous-algèbres paraboliques des \mathfrak{g}_k , $(\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}'_k)$, \mathfrak{p}_k contenant $\mathfrak{b}_0 \cap \mathfrak{g}_k$, \mathfrak{p}'_k contenant $\mathfrak{b}'_0 \cap \mathfrak{g}_k$, avec $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'_0 = \mathfrak{p}'$, et telle que, notant $\mathfrak{l}_k \oplus \mathfrak{n}_k$ (resp. $\mathfrak{l}'_k \oplus \mathfrak{n}'_k$) la décomposition de Langlands de \mathfrak{p}_k (resp. \mathfrak{p}'_k) avec $\mathfrak{j}_0 \subset \mathfrak{l}_k, \mathfrak{l}'_k$, on a :*

$$\mathfrak{g}_k = \mathfrak{l}_{k-1} \cap \mathfrak{l}'_{k-1}, \quad i = 1, \dots, p_0$$

3) *Une suite de triples de Manin, $(B_k, \mathfrak{i}_k, \mathfrak{i}'_k)$, dans \mathfrak{g}_k , $k = 0, \dots, p_0$, où $(B_0, \mathfrak{i}_0, \mathfrak{i}'_0) = (B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$, chacun étant lié à son antécédent. On notera $(\mathfrak{f}_k, \tilde{\mathfrak{f}}_k)$ un lien entre $(B_k, \mathfrak{i}_k, \mathfrak{i}'_k)$ et $(B_{k+1}, \mathfrak{i}_{k+1}, \mathfrak{i}'_{k+1})$, $k = 0, \dots, p_0 - 1$.*

On appellera une telle donnée une tour standard de triples de Manin dans \mathfrak{g} . On dira aussi que $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ est fortement standard.

(ii) *La suite des $(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}'_k, B_k)$ ne dépend que de la classe de conjugaison sous G du triple de Manin initial. En particulier p_0 ne dépend pas de la tour choisie. On l'appelle la hauteur (de la classe de conjugaison sous G) du triple de Manin de départ. De plus, si deux tours standards, $(B_k, \mathfrak{i}_k, \mathfrak{i}'_k)$, $(B_k, \tilde{\mathfrak{i}}_k, \tilde{\mathfrak{i}}'_k)$, sont associées à un même triple de Manin, pour tout $k = 1, \dots, p_0$, il existe $g_k \in G_k$ conjuguant \mathfrak{i}_k et $\tilde{\mathfrak{i}}_k$ et aussi \mathfrak{i}'_k et $\tilde{\mathfrak{i}}'_k$.*

(iii) *Le triple de Manin dans \mathfrak{j}_0 , $(B_{p_0}, \mathfrak{i}_{p_0}, \mathfrak{i}'_{p_0})$, ne dépend que (de la classe de conjugaison sous G) du triple de Manin de départ. En particulier il ne dépend pas de la tour standard associée à ce triple de Manin. On l'appelle le socle de la classe de conjugaison sous G de triples de Manin considérée. Notons que $(\mathfrak{i}_{p_0}, \mathfrak{i}'_{p_0})$ est juste une paire de sous-espaces vectoriels réels de \mathfrak{j}_0 , isotropes pour la restriction, B_{p_0} , de B , de dimensions maximales et en somme directe.*

(iv) *Il existe $y_k \in I_k$, $k = 1, \dots, p_0$ tel que :*

$$\tilde{\mathfrak{f}}_k = \text{Ad } y_{k+1} \dots \text{Ad } y_{p_0}(\mathfrak{i}_{p_0}) \subset \mathfrak{i}_k \cap \mathfrak{i}_{k+1}, \quad k = 0, \dots, p_0 - 1$$

On notera $x_1 = y_1 \dots y_{p_0} \in I_1 \dots I_{p_0} \subset L \cap L'$, de sorte que $\tilde{\mathfrak{f}}_0 = \text{Ad } x_1(\mathfrak{i}_{p_0})$. On introduit un élément x'_1 ayant les mêmes propriétés pour $\tilde{\mathfrak{f}}'_0$ et \mathfrak{i}'_{p_0}

Démonstration :

Montrons (i) par récurrence sur le rang de $\mathfrak{g}^{\text{der}}$. Le cas où $\mathfrak{g}^{\text{der}}$ est nul est clair. Supposons le non nul.

D'après le Théorème 3 (i), étant donné un triple de Manin sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, il existe un triple de Manin, $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$, qui lui est conjugué sous G , et qui est lié à son antécédent $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$. Comme $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ est différent de \mathfrak{g} , d'après le Théorème 2, l'hypothèse de récurrence implique qu'il existe $g_1 \in L \cap L' = (L \cap L')^0$, tel que $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1) = (B_1, \text{Ad } g_1(\mathfrak{i}_1), \text{Ad } g_1(\mathfrak{i}'_1))$ soit le premier élément d'une tour standard, T_1 , de $\mathfrak{g}_1 := \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$. Mais il est facile de voir, par transport

de structure et grâce à la Propostion 4, que $(B, \mathbf{i}, \mathbf{i}') := (B, \text{Ad } g_1(\mathbf{i}), \text{Ad } g_1(\mathbf{i}'))$ est lié à $(B_1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}'_1)$, un lien entre les deux étant obtenu par conjugaison par g_1 d'un lien entre $(B, \mathbf{i}, \mathbf{i}')$ et $(B_1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}'_1)$. Adjoignant $(B, \mathbf{i}, \mathbf{i}')$ à la tour standard, T_1 , dans \mathfrak{g}_1 , on obtient une tour standard dans \mathfrak{g} , qui possède les propriétés voulues. Ceci prouve (i).

Montrons (ii) par récurrence sur le rang de \mathfrak{g}^{der} . Si deux tours standards, $(B_k, \mathbf{i}_k, \mathbf{i}'_k), (B_k, \mathbf{i}_k, \mathbf{i}'_k)$, sont associées à un même triple de Manin sous $(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$, on a $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}$, $\mathbf{p}'_0 = \mathbf{p}'_0 = \mathbf{p}$, d'après la Proposition 1, donc $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1$. De plus, d'après la Proposition 2 (i), $(B_0, \mathbf{i}_0, \mathbf{i}'_0), (B_0, \mathbf{i}_0, \mathbf{i}'_0)$ sont conjugués par un élément de $P \cap P'$. Alors, d'après la Proposition 4, les antécédents de $(B_0, \mathbf{i}_0, \mathbf{i}'_0), (B_0, \mathbf{i}_0, \mathbf{i}'_0)$ sont conjugués par un élément de $G_1 = L \cap L'$. On applique l'hypothèse de récurrence pour achever de prouver (ii).

(iii) résulte de (ii) appliqué à l'indice $k = p_0$.

Pour (iv), on procède par récurrence descendante sur k . Il suffit alors d'observer que, $\tilde{\mathfrak{f}}_k$ et $\tilde{\mathfrak{f}}_{k+1}$ étant deux sous-algèbres de Cartan fondamentales de \mathbf{i}_k , d'après la définition des liens (cf. Théorème 4), elles sont conjuguées par un élément de I_{k+1} . \square

On s'intéresse maintenant à l'utilisation de la partie réciproque du Théorème 4. On se fixe une forme de Manin B sur \mathfrak{g} . On note B_1 sa restriction à $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$. On se donne un triple de Manin, $(B_1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}'_1)$, fortement standard dans $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$. On emploie les notations de la Proposition 5, pour une tour standard débutant par ce triple de Manin. On fixe $\tilde{\mathfrak{f}}$ (resp. $\tilde{\mathfrak{f}}'$) une sous-algèbre de Cartan fondamentale de \mathbf{i}_1 (resp. \mathbf{i}'_1). Procédant comme dans la preuve du point (iv) de la Proposition 5, on trouve $x_1 \in I_1 \dots I_{p_0}$, $x'_1 \in I'_1 \dots I'_{p_0}$, avec $\tilde{\mathfrak{f}} = \text{Ad } x_1(\mathbf{i}_{p_0})$, $\tilde{\mathfrak{f}}' = \text{Ad } x'_1(\mathbf{i}'_{p_0})$. Si σ est une af-involution de \mathfrak{m} , on notera $\bar{\sigma} = \text{Ad } x_1^{-1} \circ \sigma \circ \text{Ad } x_1|_{\mathfrak{m}}$ et $\bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{m}^{\bar{\sigma}}$, etc.

L'intérêt du Lemme suivant réside dans le fait qu'il réduit une partie de la construction d'un relèvement de $(B_1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}'_1)$, avec lien $(\tilde{\mathfrak{f}}, \tilde{\mathfrak{f}}')$, à des questions sur le socle de celui ci.

Lemme 13 *Soit σ une af-involution l'algèbre de Lie \mathfrak{m} .*

La paire $(\sigma, \tilde{\mathfrak{f}})$ vérifie les conditions 1) à 5) du Théorème 4, si et seulement si $(\bar{\sigma}, \mathbf{i}_{p_0})$ vérifie des conditions similaires, où l'on remplace \mathbf{l}_1 par \mathbf{l}_1 (où $\mathbf{l}_1 \oplus \mathbf{n}_1$ est la décomposition de Langlands de \mathfrak{p}_1 telle que \mathbf{l}_1 contienne \mathbf{j}_0), \mathbf{h}_1 par $\mathbf{h}_1 = \mathbf{i}_1 \cap \mathfrak{m}_1$. En particulier, il faut que \mathbf{i}_{p_0} vérifie $\mathbf{i}_{p_0} = (\mathbf{i}_{p_0} \cap \mathfrak{m}) \oplus (\mathbf{i}_{p_0} \cap \mathfrak{a})$.

Démonstration :

On remarque que I_2, \dots, I_{p_0} sont tous contenus dans $L_1 \cap L'_1$, qui normalise \mathbf{n}_1 . Comme I_1 normalise \mathbf{n}_1 , il en va de même de x_1 . On remarque également que $\mathbf{l}_1 = \text{Ad } x_1(\mathbf{l}_1)$, car $\mathbf{j} = \text{Ad } x_1(\mathbf{j}_0)$. Par ailleurs x_1 est dans $L \cap L'$. Le lemme est alors une simple application du transport de structure. \square

Proposition 6 *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple complexe, \mathbf{j} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} . On note $\mathbf{j}_{\mathbb{R}}$, l'espace des éléments de \mathbf{j} , dont l'image*

par la représentation adjointe n'a que des valeurs propres réelles.

(i) Si $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{j}$ est une sous-algèbre de Cartan fondamentale d'une forme réelle de \mathfrak{g} , \mathfrak{h} , il existe un ensemble de racines positives de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{j})$, $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{j})^+$ une involution \mathbb{C} -linéaire de \mathfrak{j}^* , induisant une involution du diagramme de Dynkin correspondant et telle que :

$$\mathfrak{f} = \{X \in \mathfrak{j} \mid {}^t\tau(X) = -\overline{X}\}$$

où $X \mapsto \overline{X}$ est la conjugaison de \mathfrak{j} par rapport à sa forme réelle $\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}$ et où ${}^t\tau$ est la transposée de τ .

De plus τ est caractérisée par cette condition.

(ii) On note σ la conjugaison de \mathfrak{g} , par rapport à sa forme réelle \mathfrak{h} . Une forme réelle de \mathfrak{g} , \mathfrak{h}' , admet \mathfrak{f} pour sous-algèbre de Cartan, automatiquement fondamentale, si et seulement si elle est l'espace des points fixes d'une involution antilinéaire, σ' , de la forme :

$$\sigma' = \sigma \circ \text{Ad } j, \quad j \in Z^1(\sigma, J) = \{j \in J \mid j^\sigma = j^{-1}\}$$

(iii) Si $j = j_1 j_2 j_2^{-\sigma}$, on a :

$$\sigma \circ \text{Ad } j = \text{Ad } j_2^{-1} \circ (\sigma \circ \text{Ad } j_1) \circ \text{Ad } j_2$$

(iv) Le quotient $H^1(\sigma, J)$ du groupe $Z^1(\sigma, J)$ par son sous-groupe $B^1(\sigma, J) = \{jj^{-\sigma} \mid j \in J\}$ est fini.

Démonstration :

On note σ la conjugaison de \mathfrak{g} , par rapport à sa forme réelle \mathfrak{h} .

Comme \mathfrak{f} est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de \mathfrak{h} , on peut choisir un élément régulier de \mathfrak{g} , X_0 , dans $\mathfrak{f} \cap i\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}$. On définit :

$$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{j})^+ := \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{j}) \mid i\alpha(X_0) > 0\}$$

On remarque que la conjugaison complexe induit une involution de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{f})$ car si $\beta \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{f})$ et $X \in \mathfrak{g}^\beta$, $\sigma(X)$ est élément de $\mathfrak{g}^{\overline{\beta}}$. Si $\beta \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{f}, \mathbb{C})$, β admet un unique prolongement \mathbb{C} -linéaire à \mathfrak{j} . Celui-ci appartient à $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{j})$ et est noté $\tilde{\beta}$. Alors l'application :

$$\alpha \mapsto -(\overline{\alpha|_{\mathfrak{f}}})^\sim, \quad \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{j})$$

est clairement induite par un endomorphisme \mathbb{R} -linéaire du sous-espace réel de \mathfrak{j}^* engendré par les éléments de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{j})$. On note son prolongement \mathbb{C} -linéaire à \mathfrak{j}^* , τ . Alors τ est involutif. On voit facilement qu'il préserve $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{j})^+$, et induit donc une involution du diagramme de Dynkin.

Par ailleurs :

$$\mathfrak{f} = (\mathfrak{f} \cap \mathfrak{j}_{\mathbb{R}}) \oplus (\mathfrak{f} \cap i\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}), \quad \mathfrak{j} = \mathfrak{f} \oplus i\mathfrak{f}$$

car \mathfrak{f} est une sous-algèbre de Cartan d'une forme réelle de \mathfrak{g} , contenue dans \mathfrak{j} . Tenant compte de ces décompositions, on vérifie aisément l'égalité :

$$\mathfrak{f} = \{X \in \mathfrak{j} \mid {}^t\tau(X) = -\overline{X}\}$$

A noter que celle-ci caractérise la restriction de τ à \mathfrak{f} , donc détermine τ par \mathbb{C} -linéarité. D'où (i).

Montrons (ii)). Soit \mathfrak{h}' une forme réelle de \mathfrak{g} , admettant \mathfrak{f} pour sous-algèbre de Cartan. D'abord celle-ci est fondamentale car aucune racine de \mathfrak{f} n'est réelle puisque \mathfrak{f} est fondamentale dans \mathfrak{h} . Notons σ' la conjugaison par rapport à \mathfrak{h}' . Alors $\sigma\sigma'$ est un automorphisme \mathbb{C} -linéaire de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , qui est l'identité sur \mathfrak{f} , donc sur \mathfrak{j} , par \mathbb{C} -linéarité. Il est donc de la forme $Ad j$, $j \in J$ (cf. [Bou], Ch. VIII, Paragraphe 5.2, Proposition 2, et Ch. VI). Donc, on a :

$$\sigma' = \sigma \circ Ad j$$

Le fait que σ' soit une involution montre que j doit être élément de $Z^1(\sigma, J)$, et σ' a la forme voulue.

Réciproquement, on remarque que si σ' est de la forme indiquée, c'est un automorphisme antilinéaire de \mathfrak{g} , qui est involutif car $j \in Z^1(\sigma, J)$. Son ensemble de points fixes est une forme réelle de \mathfrak{g} , \mathfrak{h}' , contenant \mathfrak{f} . Donc \mathfrak{f} est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{h}' , nécessairement fondamentale, comme on l'a vu plus haut. Ceci achève de prouver (ii).

Montrons (iii), en identifiant J à $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}^n$, la restriction de σ à J étant alors définie par passage au quotient d'un endomorphisme antilinéaire de \mathbb{C}^n , préservant \mathbb{Z}^n , noté $\tilde{\sigma}$. Un calcul immédiat montre que :

$$H^1(\sigma, J) \approx (\{X \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{\sigma}(X) = X, 2X \in \mathbb{Z}^n\} + \mathbb{Z}^n)/\mathbb{Z}^n$$

Mais le deuxième membre est contenu dans $((1/2)\mathbb{Z}^n)/\mathbb{Z}^n$ qui est isomorphe au groupe fini $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. Ceci achève de prouver (iii) et la Proposition. \square

La preuve de la Proposition suivante est immédiate

Proposition 7 *Soit \mathfrak{g}_1 une algèbre de Lie simple complexe, \mathfrak{j}_1 une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_1 . On note $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{j}_0 := \mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_1$.*

(i) Un sous-espace \mathfrak{f} est une sous-algèbre de Cartan de l'espace des points fixes d'un automorphisme involutif \mathbb{C} -linéaire de \mathfrak{g} , permutant les facteurs, si et seulement si

$$\mathfrak{f} = \{(X, \tau(X)) \mid X \in \mathfrak{g}_1\},$$

où τ est un automorphisme de $\Delta(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{j}_1)$, l'involution étant alors donnée par:

$$\sigma_{\tilde{\tau}}(X, Y) = (\tilde{\tau}^{-1}(Y), \tilde{\tau}(X)), \quad (X, Y) \in \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1,$$

où $\tilde{\tau}$ est un automorphisme de \mathfrak{g}_1 , dont la restriction à \mathfrak{j}_1 est égale à τ .

En particulier il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour τ et \mathfrak{f} .

(ii) Si $\tilde{\tau}$ est un automorphisme de \mathfrak{g}_1 , dont la restriction à \mathfrak{j}_1 est égale à τ , les automorphismes de \mathfrak{g}_1 possédant la même propriété sont ceux de la forme $\tilde{\tau} \circ Ad j_1$, $j_1 \in J_1$.

(iii) Les automorphismes involutifs \mathbb{C} -linéaires de \mathfrak{g} permutant les facteurs, dont \mathfrak{f} est une sous-algèbre de Cartan de l'ensemble de ses points fixes, sont de la forme :

$$Ad j^{-1} \circ \sigma_{\tilde{\tau}} \circ Ad j$$

où :

$$j = (j_1, 1), \quad j_1 \in J_1$$

Le Théorème 4 montre que, à conjugaison sous G (ou sous $P \cap P'$ d'après la Proposition 2), tout triple de Manin fortement standard de \mathfrak{g} , sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, est obtenu par relèvement d'un triple de Manin fortement standard de $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$. Il est clair que l'ensemble des classes de conjugaison sous G des relèvements d'un triple de Manin de $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$, ne dépend que de la classe de conjugaison sous $L \cap L'$ de ce triple de Manin, ceci par transport de structure. C'est pourquoi on peut se limiter à appliquer le relèvement à une famille \mathcal{F} de représentants fortement standard des classes de conjugaison sous $L \cap L'$ de triples de Manin de $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$, pour obtenir tous les triples de Manin sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, à conjugaison sous G près. D'après la Proposition 4, le relèvement de deux triples de Manin distincts de \mathcal{F} sont non conjugués sous \mathfrak{g} . La Proposition suivante permet de donner une condition pour que deux relèvements d'un même élément de \mathcal{F} soient conjugués.

Proposition 8 (i) Si deux triples de Manin de \mathfrak{g} , $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$, $(B, \mathfrak{i}_a, \mathfrak{i}'_a)$, sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, ayant le même antécédent, sont conjugués sous G , alors il existe $x \in M$, $x' \in M'$ tels que :

$$Ad x(\mathfrak{h}) = \underline{\mathfrak{h}}, \quad Ad x'(\mathfrak{h}') = \underline{\mathfrak{h}'}, \quad \text{où } \mathfrak{h} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{m}, \text{ etc.}$$

De plus :

$$\mathfrak{i}_a = \mathfrak{i}_a \text{ et } \mathfrak{i}'_a = \mathfrak{i}'_a$$

(ii) Si $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$, $(B, \mathfrak{i}_a, \mathfrak{i}'_a)$ sont deux triples de Manin sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ pour lequel il existe $x \in M$, $x' \in M'$ tels que :

$$Ad x(\mathfrak{i}) = \mathfrak{i}_a, \quad Ad x'(\mathfrak{i}') = \mathfrak{i}'_a,$$

ils sont conjugués par un élément de G , si et seulement si $x\tilde{I} \cap x'\tilde{I}'$. Ici \tilde{I} désigne le groupe $\tilde{H}AN$, où $\tilde{H} = \{m \in M | Ad m \text{ préserve } \mathfrak{h}\}$. De plus \tilde{I} est le normalisateur dans \mathfrak{g} de \mathfrak{i} . Le groupe \tilde{I}' est défini de manière similaire.

Démonstration :

Si deux triples de Manin sont comme dans (i), il existe $g \in P \cap P'$ qui les conjugue, d'après la Proposition 2 (i). Ecrivons $g = unn'$, avec $u \in L \cap L'$, $n \in N_L$, $n' \in N'_L$ et posons $\tilde{x} = un' \in L$, $\tilde{x}' = un \in L'$. Comme n et n' commutent et que n normalise \mathfrak{i} , on a : $Ad \tilde{x}(\mathfrak{i}) = \mathfrak{i}_a$. Comme $\tilde{x} \in L$, $Ad \tilde{x}$ préserve \mathfrak{m} et fixe les éléments de \mathfrak{a} . D'où il résulte immédiatement que $Ad \tilde{x}(\mathfrak{h}) = \underline{\mathfrak{h}}$ et $\mathfrak{i}_a = \mathfrak{i}_a$. Ecrivant $\tilde{x} = xa$, avec $x \in M$, $a \in A$, on voit que x vérifie les propriétés voulues. On procède de même pour trouver x' . Ceci prouve (i).

Montrons (ii) et soit deux triples de Manin comme dans l'énoncé. Ils sont conjugués sous G , si et seulement si il existe $y \in G$ tel que :

$$Ad y(\mathfrak{i}) = \mathfrak{i}_a, \quad Ad y(\mathfrak{i}') = \mathfrak{i}'_a$$

Comme $x \in M$, il normalise \mathfrak{n} et fixe \mathfrak{a} . Tenant compte des conditions de l'énoncé, on voit que y doit vérifier :

$$Ad x^{-1}y(\mathfrak{i}) = \mathfrak{i}, Ad x'^{-1}y(\mathfrak{i}') = \mathfrak{i}'$$

Pour conclure, il reste à prouver que le normalisateur dans G de \mathfrak{i} , est bien égal à \tilde{I} . Il est clair que \tilde{I} est bien contenu dans ce normalisateur. Réciproquement, soit y un élément de ce normalisateur. Il normalise le radical nilpotent \mathfrak{n} de \mathfrak{i} , donc $y \in P$, d'après (1.17). On écrit $y = man$ avec $m \in M$, $a \in A$, $n \in N$. Comme AN est dans le normalisateur de \mathfrak{i} , on voit que m normalise \mathfrak{i} et donc aussi $\mathfrak{h} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{m}$. Donc $m \in \tilde{H}$ et y appartient à \tilde{I} , comme désiré. Ceci achève de prouver la Proposition. \square

Références

- [Bor], BOREL A., *Linear algebraic groups, Second Enlarged Edition*, Graduate Text in Math.126, 1991, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.
- [Bou], BOURBAKI N., Groupes et Algèbres de Lie, Chapitre I, Chapitres IV, V, VI, Chapitres VII, VIII, Actualités Scientifiques et Industrielles 1285, 1337, 1364, Hermann, Paris, 1960, 1968, 1975.
- [G], GANTMACHER F., *Canonical representation of automorphism of a semisimple Lie group*, Math Sb., 47, (1939), 101-144.
- [K1], KAROLINSKY E., *A classification of Poisson homogeneous spaces of a compact Poisson Lie group*, Math. Phys., Anal. and Geom., 3 (1996), 545-563.
- [K2], KAROLINSKY E., *A classification of Poisson homogeneous spaces of a compact Poisson Lie group*, Dokl. Ak. Nauk, 359 (1998), 13-15.
- [K3], KAROLINSKY E., *A classification of Poisson homogeneous spaces of a reductive complex Poisson Lie group*, Preprint, 1999
- [M1], MATSUKI T., *The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups*, J. Math. Soc. Japan, 31 (1979), 331-357.
- [M2], MATSUKI T., *Orbits of affine symmetric spaces under the action of parabolic subgroups*, Hiroshima J. Math., 12 (1982), 307-320.

*Institut de Mathématiques de Luminy, U.P.R. 9016 du C.N.R.S.
 Université de la Méditerranée, 163 Avenue de Luminy, Case 907,
 13288, Marseille Cedex 09, France
 e-mail : delorme@iml.univ-mrs.fr*